Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

68. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 14. NOVEMBER 1957)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1957

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F.K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

68. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

Morita, K., Y. Kawada and H. Tachikawa, On injective modules 217
Chen Yung-Ming, Some Asymptotic Properties of Fourier Constants and Integrability Theorems 227
Stallmann, F., Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. III 245
Saksena, K. M., On a generalized Laplace integral 267
Narain, R., Certain properties of generalized Laplace transform involving Meijer's G-function 272
Stein, S. K., A Continuous Mapping Defined by a Convex Curve 282
Carlitz, L., The bilinear Generating Funktion for Hermite Polynomials in Several Variables 284
McCarthy, P. J., On Indefinite Ternary Genera of One Class 290
Boas jr., R. P., Growth of Derivatives of Entire Functions 296
Dinghas, A., Zur Einzigkeitsfrage der Minkowski-Lusternikschen Ungleichung für die Relativoberfläche 299
Nitsche, J., Über die isolierten Singularitäten der Lösungen von $\Delta u = e^u$ 316

Morita, K., Y. Kawada and H. Tachikawa
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 217—226 (1957)

On injective modules

By

Kiiti Morita, Yutaka Kawada and Hiroyuki Tachikawa

Let A be an associative ring which possesses a unit element 1 and satisfies the minimum condition for left ideals. Recently Nagao-Nakayama [9] have determined the structure of projective A-modules[1]), and for injective modules they have dealt only with the case where A is an algebra over a field. In the present paper we shall be concerned with injective modules for the general case.

In § 1 we shall state some theorems concerning projective modules; Theorem 1.3 is a generalization of a result obtained in a previous paper [8]. § 2 is devoted to the proofs of the theorems concerning injective modules which are dual to the theorems of § 1 in the sense of S. Maclane [7]. In § 3 we shall discuss the decomposability of injective modules. Our results are stated as follows. An injective module is determined uniquely up to isomorphism by its semi-simple part and is indecomposable if and only if its semi-simple part is simple; in general an injective module is expressible as a direct sum of indecomposable injective modules. Here the semi-simple part of a left A-module L is defined to be the largest submodule of L which is semi-simple (= completely reducible).

In § 4 we shall discuss an annihilator relation between submodules of L and those of $\mathrm{Hom}(L, Q)$, and determine the structure of the endomorphism ring of Q where Q is an injective module. The former result may be considered as a basis of the duality relation of character modules for quasi-Frobenius rings (cf. [8]), while the latter result is available to derive the theorems in § 3.

As an application of our results, in § 5 we shall give a simple proof to the theorem that A is injective as a left A-module if and only if A is quasi-Frobenius.

Another characterization of quasi-Frobenius rings is obtained also. Any left A-module is isomorphic to a left A-module which is contained in a direct sum of free A-modules if and only if A is quasi-Frobenius.

Throughout this paper we assume that A is a ring which has a unit element and satisfies the minimum condition, and that N is the radical of A. For a left A-module L we denote by $S(L)$ the semi-simple part of L:

$$S(L) = \{x \mid Nx = 0,\ x \in L\}.$$

[1]) "Projective module" = "(M_0)-module", "injective module" = "(M_u)-module". In this paper we shall follow the terminologies of Cartan-Eilenberg [1], while in the previous paper [8] we used (M_0)-modules and (M_u)-modules due to Gaschütz [5].

§ 1. Projective modules

THEOREM 1.1[2]). Let P_1 and P_2 be projective left A-modules. Then every diagram

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta} & & \\ P_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in which each row is exact, can be imbedded in a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta} & & \\ P_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_2 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

If $\operatorname{Ker}\alpha_i \subset NP_i$, $i=1, 2$, then each such homomorphism φ is an epimorphism or isomorphism according as ϑ is an epimorphism or isomorphism.

Proof. The first part is obvious. Suppose that $\operatorname{Ker}\alpha_i \subset NP_i$, $i=1, 2$, and that ϑ is an epimorphism. Then we have $P_2 = \operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\alpha_2 = \operatorname{Im}\varphi + NP_2$. From this it follows further that $P_2 = \operatorname{Im}\varphi + N^jP_2$, $j=1, 2, \ldots$, since $P_2 = \operatorname{Im}\varphi + NP_2 = \operatorname{Im}\varphi + N(\operatorname{Im}\varphi + NP_2) = \operatorname{Im}\varphi + N^2P_2$. Therefore φ is an epimorphism since N is nilpotent. Moreover we have $P_1 = \operatorname{Ker}\varphi \oplus P_1'$ and $\varphi' : P_1' \to P_2$ is an isomorphism where $\varphi'(x) = \varphi(x)$ for $x \in P_1'$. If ϑ is an isomorphism, then we have a homomorphism $\psi : P_2 \to P_1$ by putting $\psi(x) = \varphi'^{-1}(x)$ for $x \in P_2$. As has been proved above, ψ must be an epimorphism. Thus we have $\operatorname{Ker}\varphi = 0$.

COROLLARY 1.2[2]). Let L be a left A-module and P a projective left A-module. If $L/NL \cong P/NP$, then there exists an epimorphism $\varphi : P \to L$; in case L is also projective, L is isomorphic to P.

Proof. This is an immediate consequence of Theorem 1.1.

THEOREM 1.3. Let P be a projective left A-module. Then every diagram

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\alpha_1} & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta} & & \\ P & \xrightarrow{\alpha_2} & M_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in which each row is exact, ϑ is an isomorphism and each M_i is finitely generated, can be imbedded in a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\alpha_1} & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta} & & \\ P & \xrightarrow{\alpha_2} & M_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in which φ is an isomorphism.

[2]) After completing the manuscript, we have found that EILENBERG [2] has already obtained these results.

Proof. We have clearly the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{j_1} & P/L_1 & \xrightarrow{\alpha_1'} & M_1 \\ & & \downarrow\vartheta' & & \downarrow\vartheta \\ P & \xrightarrow{j_2} & P/L_2 & \xrightarrow{\alpha_2'} & M_2 \end{array} \qquad \alpha_i = \alpha_i' j_i, \quad i = 1, 2$$

in which $L_i = \operatorname{Ker} \alpha_i$, j_i is the natural homomorphism ($i = 1, 2$) and ϑ' is an isomorphism. Therefore we have only to treat the case where $M_i = P/L_i$ and each α_i is the natural homomorphism j_i.

In this case we can construct, similarly as in [8], the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} P & \xrightarrow{j_1} & P/L_1 & \xrightarrow{k_1} & (P/L_1 + NP) & \xleftarrow{m_1} & P/NP \xleftarrow{l} P \\ & & \downarrow\vartheta & & \downarrow\vartheta^* & & \downarrow\varphi_0 \quad \downarrow\varphi_1 \\ P & \xrightarrow{j_2} & P/L_2 & \xrightarrow{k_2} & (P/L_2 + NP) & \xleftarrow{m_2} & P/NP \xleftarrow{l} P \end{array}$$

in which k_i, m_i, l are all natural homomorphism and ϑ^*, φ_0, φ_1 are isomorphisms. Indeed, the existence of ϑ^* is obvious, and the existence of φ_0 follows easily from the assumption that P/L_i are finitely generated and from the fact that P/NP is semi-simple. Finally the existence of φ_1 is assured by Theorem 1.1.

Since $k_i j_i = m_i l$, $i = 1, 2$, we have

$$k_2 \vartheta j_1(x) = k_2 j_2 \varphi_1(x), \quad \text{for} \quad x \in P. \tag{1}$$

Since P is projective, as is proved in NAGAO-NAKAYAMA [9], P is expressed as a direct sum of indecomposable projective modules $A e_\lambda u_\lambda$ where each e_λ is a primitive idempotent of A and $A e_\lambda u_\lambda \cong A e_\lambda$ for each λ. From (1) we have $\vartheta j_1(x) - j_2 \varphi_1(x) \in (L_2 + NP)/L_2$, and hence we can find elements r_λ of NP such that

$$\vartheta j_1(e_\lambda u_\lambda) = j_2 \varphi_1(e_\lambda u_\lambda) + j_2(e_\lambda r_\lambda).$$

If we put

$$\varphi(\sum a_\lambda e_\lambda u_\lambda) = \varphi_1(\sum a_\lambda e_\lambda u_\lambda) + \sum a_\lambda e_\lambda r_\lambda,$$

where $a_\lambda \in A$, then $\varphi: P \to P$ is a homomorphism since $A e_\lambda u_\lambda \cong A e_\lambda$ and hence $a_\lambda e_\lambda u_\lambda = a_\lambda' e_\lambda u_\lambda \Leftrightarrow a_\lambda e_\lambda = a_\lambda' e_\lambda$. For this φ we have $\vartheta j_1 = j_2 \varphi$. Since $\varphi_0 l = l \varphi$ and φ_0 is an isomorphism, we see by Theorem 1.1 that φ is an isomorphism. This completes our proof.

Remark. The assumption that M_i are finitely generated is not redundant in Theorem 1.3.

§ 2. Injective modules

In this section we shall prove the theorems dual to those of § 1.

THEOREM 2.1. Let Q_1 and Q_2 be injective left A-modules. Then every diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Q_1 \\ & & & & \downarrow\vartheta \\ 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Q_2 \end{array}$$

in which each row is exact, can be imbedded in a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Q_1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\vartheta} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Q_2. \end{array}$$

If $\operatorname{Im}\beta_i > S(Q_i)$[3], $i=1,2$, then each such homomorphism φ is a monomorphism or isomorphism according as ϑ is a monomorphism or isomorphism.

Proof. The first part is obvious. Suppose that $\operatorname{Im}\beta_i > S(Q_i)$, $i=1,2$ and ϑ is a monomorphism. Then we have $0=\operatorname{Ker}\varphi\cap\operatorname{Im}\beta_1=\operatorname{Ker}\varphi\cap S(Q_1)$. Since $N^j(\operatorname{Ker}\varphi)<\operatorname{Ker}\varphi$, we have $N^j(\operatorname{Ker}\varphi)\cap S(Q_1)=0$ for $j=1,2,\ldots$. Since N is nilpotent, we must have $N^j\operatorname{Ker}\varphi=0$ for some j. Then $N(N^{j-1}\operatorname{Ker}\varphi)=0$ and hence $N^{j-1}\operatorname{Ker}\varphi<N^{j-1}\operatorname{Ker}\varphi\cap S(Q)=0$. Thus we have $\operatorname{Ker}\varphi=0$ and φ is a monomorphism.

Let ϑ be now an isomorphism. Since Q_1 is injective there exists a submodule Q_2' of Q_2 such that $Q_2=\operatorname{Im}\varphi\oplus Q_2'$. We define a homomorphism $\psi: Q_2\to Q_1$ by putting $\psi(x)=\varphi^{-1}(x')$, if $x=x'+x''$, $x'\in\operatorname{Im}\varphi$, $x''\in Q_2'$. Then we have clearly $\beta_1\vartheta^{-1}=\psi\beta_2$. Hence we have $\operatorname{Ker}\psi=0$ by the first part of the proof. On the other hand, $\operatorname{Ker}\psi=Q_2'$. Thus $\varphi(Q_1)=Q_2$.

COROLLARY 2.2. Let L be a left A-module and Q an injective left A-module. If $S(L)\cong S(Q)$, then there exists a monomorphism $\varphi: L\to Q$; in case L is also injective, L is isomorphic to Q.

Proof. This is an immediate consequence of Theorem 2.1. Corollary 2.2 shows that an injective module is determined uniquely up to isomorphism by its semi-simple part.

THEOREM 2.3. Let Q be an injective left A-module. Then every diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Q \\ & & \downarrow{\scriptstyle\vartheta} & & \\ 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Q \end{array}$$

in which each row is exact, ϑ is an isomorphism and each M_i is finitely generated, can be imbedded in a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Q \\ & & \downarrow{\scriptstyle\vartheta} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Q \end{array}$$

in which φ is an isomorphism.

[3] $S(Q)$ means the semi-simple part of Q; cf. the introduction.

Proof. Since M_i are finitely generated, there exists an isomorphism ϑ^* such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\beta_1'} & \beta_1(M_1)+S(Q) \xrightarrow{i} Q \\ \downarrow{\scriptstyle\vartheta} & & \downarrow{\scriptstyle\vartheta^*} \\ M_2 & \xrightarrow{\beta_2'} & \beta_2(M_2)+S(Q) \xrightarrow{i} Q \end{array}$$

is commutative, where $\beta_j = i\beta_j'$, $j=1, 2$ and i is the injection.

Applying Theorem 2.1 to the diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \beta_1(M_1)+S(Q) & \xrightarrow{i} & Q \\ & & \downarrow{\scriptstyle\vartheta^*} & & \\ 0 & \longrightarrow & \beta_2(M_2)+S(Q) & \xrightarrow{i} & Q, \end{array}$$

we see that there exists an isomorphism $\varphi: Q \to Q$ such that $i\vartheta^* = \varphi i$. We have clearly $\beta_2\vartheta = \varphi\beta_1$. This completes our proof.

Remark. In Theorem 2.3 the assumption that M_i are finitely generated is not redundant as is easily shown.

§ 3. The decomposability of injective modules

In this section we shall establish the following theorems.

THEOREM 3.1. An injective left A-module Q is indecomposable if and only if its semi-simple part $S(Q)$ is simple.

THEOREM 3.2. An injective left A-module is expressed as a direct sum of indecomposable injective modules.

We shall begin with

LEMMA 3.3. Let Q be an injective left A-module and let C be a semi-simple submodule of Q. Then a maximal submodule L of Q such that $S(L)=C$, is an injective module with C as its semi-simple part.

Proof. By ZORN's lemma there exists such a maximal submodule L of Q with C as its semi-simple part.

Let f be any homomorphism of a left ideal I of A into L. Then, by ZORN's lemma, there exists a left ideal I_0 which is maximal with respect to the property that f can be extended to a homomorphism of I_0 into L. Let f_0 be a homomorphism of I_0 into L which is an extension of f.

Since Q is injective, there exists an element u of Q such that

$$f_0(a) = au, \qquad \text{for } a \in I_0. \tag{2}$$

Since I_0 is maximal, we have $I_0 = \{a \mid au \in L,\ a \in A\}$. We shall prove that $u \in L$.

Suppose that $u \notin L$. Then there exists a non-negative integer i such that $N^i u \subsetneqq L$, $N^{i+1}u \subseteqq L$, where we put $N^0 = A$. If we put $L' = L + N^i u$, then $L \neq L'$ and $L \subset L'$. We shall show that $S(L') = C$.

To prove this it is sufficient to show that any simple submodule of L' is contained in C. Any simple submodule of L' is of the form $Ae_\lambda(v+a_0u)$ where e_λ is a primitive idempotent, and $v\in L$, $a_0\in N^i$. We have clearly $Ne_\lambda=\{x|x(e_\lambda v+e_\lambda a_0u)=0,\ x\in Ae_\lambda\}$. Hence

$$re_\lambda v=-re_\lambda a_0u \tag{3}$$

for any element r of N. Since $a_0\in N^i$, we have $re_\lambda a_0u\in N^{i+1}u\subset L$. Hence $Ne_\lambda a_0\subseteqq I_0$.

Let us put $J_0=\{x|xa_0\in I_0,\ x\in Ae_\lambda\}$. Then $J_0\supseteqq Ne_\lambda$. Hence J_0 is equal to either Ae_λ or Ne_λ. We distinguish two cases.

1) $J_0=Ae_\lambda$. In this case, $e_\lambda a_0\in I_0$ and hence $e_\lambda a_0\,u\in L$. Therefore $Ae_\lambda(v+a_0u)\subseteqq L$. Since the semi-simple part of L is C, we have $Ae_\lambda(v+a_0u)\subseteqq C$.

2) $J_0=Ne_\lambda$. We shall first show that $xe_\lambda a_0=x'e_\lambda a_0$ for x, $x'\in A$ implies $-xe_\lambda v=-x'e_\lambda v$. Because we have $(x-x')e_\lambda a_0=0$ and hence $(x-x')e_\lambda\in J_0=Ne_\lambda$. From (3) we have $(x-x')e_\lambda v=-(x-x')e_\lambda a_0u$, and the right hand side of this expression is equal to zero as is shown above. Thus we have $xe_\lambda v=x'e_\lambda v$. Now we shall define a homomorphism $\varphi: I_0+Ae_\lambda a_0\to L$ by

$$\varphi(x'+xe_\lambda a_0)=f_0(x')-xe_\lambda v.$$

If $xe_\lambda a_0\in I_0$, then we have $xe_\lambda\in J_0=Ne_\lambda$ and hence $f_0(xe_\lambda a_0)=xe_\lambda a_0u=-xe_\lambda v$ by (2) and (3). Therefore φ is single-valued, and hence φ is a homomorphism. Thus f_0 is extended to $\varphi: I_0+Ae_\lambda a_0\to L$. This contradicts the maximality of I_0. Therefore the case 2) is excluded.

Thus we have shown that $S(L')=C$. Since $L'>L$, this contradicts to the maximality of L. Therefore we have $u\in L$. This shows that L is injective.

LEMMA 3.4. Let C be a semi-simple left A-module. Then there exists an injective module Q such that $S(Q)=C$.

Proof. By CARTAN-EILENBERG [1], there exists an injective module Q_0 containing C. Hence the lemma follows readily from Lemma 3.3.

LEMMA 3.5. Let a left A module Q be a direct sum of submodules Q_λ. Then Q is injective if and only if each Q_λ is injective.

Proof. Since A is left Noetherian, the proof is easily obtained.

Now we shall proceed to the proofs of Theorems 3.1 and 3.2.

Proof of Theorem 3.1. Let Q be an injective left A-module and let Q be a direct sum of submodules Q_1 and Q_2. Then we have $S(Q)=S(Q_1)\oplus S(Q_2)$ and $S(Q_i)\neq 0$ if $Q_i\neq 0$. This shows that if $S(Q)$ is simple, then Q is indecomposable.

Now suppose that $S(Q)$ is not simple. Then $S(Q)$ is expressed as a direct sum of simple modules C_λ since $S(Q)$ is semi-simple. By Lemma 3.4 for each λ there exists an injective module Q_λ such that $S(Q_\lambda)=C_\lambda$. If we denote by Q' the direct sum of these modules Q_λ, then Q' is injective by Lemma 3.5 and $S(Q')$ is a direct sum of $S(Q_\lambda)=C_\lambda$. Therefore we have $S(Q)\cong S(Q')$. From Corollary 2.2 it follows that $Q\cong Q'$. This shows that if $S(Q)$ is not simple, then Q is decomposable. Thus Theorem 3.1 is proved.

The above consideration shows at the same time that an injective module is expressible as a direct sum of indecomposable injective modules. Thus Theorem 3.2 is proved.

COROLLARY 3.6. Let Ae_λ/Ne_λ, $\lambda=1, \ldots, k$ be the totality of simple left A modules which are not isomorphic one another. Let Q_λ be an injective module such that $S(Q_\lambda)=Ae_\lambda/Ne_\lambda$. Then any injective left A-module is isomorphic to a direct sum of injective modules each of which is isomorphic to some Q_λ.

§ 4. The endomorphism ring of an injective module

We shall first prove the following theorem.

THEOREM 4.1. Let Q be an injective left A-module and L an arbitrary left A-module. If every simple left A-module is isomorphic to a submodule of Q, then for any submodule L_0 of L we have

$$L_0 = \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\left(L_0; \mathrm{Hom}(L, Q)\right); L\right)$$

where $\mathrm{Hom}(L, Q)$ means the set of all A-homomorphisms of L into Q and $\mathrm{Ann}\left(L_0; \mathrm{Hom}(L, Q)\right) = \{\varphi \mid \varphi(L_0) = 0, \ \varphi \in \mathrm{Hom}(L, Q)\}$, $\mathrm{Ann}(\Phi_0; L) = \{x \mid x \in L, \ \varphi_0(x) = 0 \text{ for all } \varphi_0 \in \Phi_0\}$ for a subset Φ_0 of $\mathrm{Hom}(L, Q)$.

Proof. Let x_0 be any element of L which is not contained in L_0. Then we have $Ax_0 + L_0 \neq Nx_0 + L_0$; otherwise we would have $Ax_0 + L_0 = N^i x_0 + L_0$, $i = 1, 2, \ldots$. Hence $(Ax_0 + L_0)/(Nx_0 + L_0)$ is a simple module in which the residue class $\{x_0\}$ containing x_0 is not zero. By the assumption on Q there exists a monomorphism $\bar{\chi}$ of $(Ax_0 + L_0)/(Nx_0 + L_0)$ into Q. Hence there exists a homomorphism χ of $Ax_0 + L_0$ into Q such that $\chi(Nx_0 + L_0) = 0$, $\chi(x_0) \neq 0$. Since Q is injective, χ is extended to a homomorphism φ of L into Q. For such φ we have clearly $\varphi(L_0) = 0$, $\varphi(x_0) \neq 0$. This proves that

$$\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\left(L_0; \mathrm{Hom}(L, Q)\right); L\right) < L_0.$$

Since by definition we have $L_0 < \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\left(L_0; \mathrm{Hom}(L, Q)\right); L\right)$, the desired relation is proved hereby.

Remark. In case there exists a simple module which is isomorphic to no submodule of Q, Theorem 4.1 fails to be true as is easily shown. In case A is quasi-Frobenius, A is injective as a left A-module and a right A-module (cf. Theorem 5.1 below), and hence the duality relation of character modules for quasi-Frobenius rings [8] is an immediate consequence of Theorem 4.1.

We now proceed to the case $L = Q$.

THEOREM 4.2. Let Q be an injective left A-module. Let Φ and Ψ be the endomorphism ring of Q and $S(Q)$ respectively. If we denote by Φ_N the set of all endomorphisms φ of Q such that $\varphi(S(Q)) = 0$, then Φ_N is a two-sided nilpotent ideal of Φ and the residue class ring Φ/Φ_N is isomorphic to Ψ; more precisely if $N^m = 0$, then $\Phi_N^m = 0$.

Proof. Since Q is injective, any endomorphism ψ of $S(Q)$ can be extended to an endomorphism φ of Q: $\varphi(x)=\psi(x)$ for $x\in S(Q)$. On the other hand, $\varphi(S(Q))<S(Q)$ for any $\varphi\in\Phi$. Therefore we have a ring isomorphism $\Phi/\Phi_N\cong\Psi$ by the correspondence $\Phi\ni\varphi\to\tilde{\varphi}\in\Psi$ where $\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)$ for $x\in S(Q)$.

Let us denote by $S^i(Q)$ the set of elements x of Q such that $N^ix=0$. Then we have $Q=S^m(Q)$, $S(Q)=S^1(Q)$ since $N^m=0$.

We shall prove that

$$\varphi(S^i(Q))<S^{i-1}(Q) \quad \text{for} \quad \varphi\in\Phi_N, \quad i\geqq 2. \tag{4}$$

Since $\varphi(S(Q))=0$, there exists a homomorphism $\bar{\varphi}$ of $S^i(Q)/S(Q)$ into Q such that $\bar{\varphi}\chi(x)=\varphi(x)$ for each element x of $S^i(Q)$ where χ is the natural homomorphism of $S^i(Q)$ onto $S^i(Q)/S(Q)$. On the other hand, $N^iS^i(Q)=N[N^{i-1}S^i(Q)]=0$ and hence $N^{i-1}S^i(Q)<S(Q)$. Therefore we have

$$N^{i-1}\bar{\varphi}(S^i(Q)/S(Q))=\bar{\varphi}((N^{i-1}S^i(Q)+S(Q))/S(Q))=0.$$

This shows that $\varphi(S^i(Q))=\bar{\varphi}(S^i(Q)/S(Q))<S^{i-1}(Q)$.

Let φ_j, $j=1,2,\ldots,m$ be any elements of Φ_N. Then from (4) it follows that $\varphi_m\varphi_{m-1}\cdots\varphi_2\varphi_1(Q)=0$, since $Q=S^m(Q)$. Thus we have $\Phi_N^m=0$. This completes the proof of Theorem 4.2.

COROLLARY 4.3. If an endomorphism ψ of $S(Q)$ is idempotent, then there exists an endomorphism φ of Q such that $\varphi(x)=\psi(x)$ for $x\in S(Q)$ and $\varphi(Q)$ is a direct summand of Q whose semi-simple part coincides with $\psi(S(Q))$.

Proof. The first assertion follows readily from the nilpotency of Φ_N (cf. M. DEURING [4], p. 16). Hence we have also $Q=\varphi(Q)\oplus(1-\varphi)(Q)$. From this we have further $S(Q)=S[\varphi(Q)]\oplus S[(1-\varphi)(Q)]$. On the other hand, $\varphi(Q)>\psi(S(Q))$, $(1-\varphi)(Q)>(1-\psi)(S(Q))$ and hence $S[\varphi(Q)]>\psi(S(Q))$, $S[(1-\varphi)(Q)]>(1-\psi)(S(Q))$. Since $S(Q)=\psi(S(Q))\oplus(1-\psi)(S(Q))$, we have $S[\varphi(Q)]=\psi(S(Q))$. This proves our corollary.

Corollary 4.3 yields actually another proof of Theorem 3.1 and Lemma 3.4.

The theorems concerning projective modules which are dual to Theorems 4.1 and 4.2 are stated as follows.

THEOREM 4.1'. Let P be a projective left A-module and L a left A-module. For a submodule L_0 of L we denote by Φ_0 the set of homomorphisms φ of P into L such that $\varphi(P)<L_0$. If every simple left A-module is isomorphic to a quotient module of P, then we have

$$L_0=\sum\varphi(P)$$

where φ ranges over the set Φ_0.

THEOREM 4.2'. Let P be a projective left A-module, and let Φ and Ψ be the endomorphism ring of P and P/NP respectively. If we denote by Φ_N the set of all endomorphisms φ of P such that $\varphi(P)<NP$, then Φ_N is a two-sided nilpotent ideal of Φ and the residue class ring Φ/Φ_N is isomorphic to Ψ.

§ 5. Quasi-Frobenius rings

As an application of our results in §§ 3 and 4 we can give a simple proof to the following theorem which is due to EILENBERG NAKAYAMA [3] and IKEDA-NAKAYAMA [6], cf. also our previous paper [8].

THEOREM 5.1. A ring A which possesses a unit element and satisfies the minimum condition is an injective module as a left A-module if and only if A is a quasi-Frobenius ring.

Proof. The "if" part is proved in our previous paper [8]. We shall prove the "only if" part.

Suppose that A is injective as a left A-module. Any endomorphism φ of the left A-module A can be expressed as $\varphi(x) = xa$ with $a \in A$, and if we denote this a by a_φ, then the correspondence $\varphi \to a_\varphi$ yields an inverse-isomorphism λ of Φ onto A, where Φ is the ring of endomorphisms of A. Following the notation of NAKAYAMA let us put for a subset K of A

$$r(K) = \{x \mid Kx = 0,\ x \in A\}, \quad l(K) = \{x \mid xK = 0,\ x \in A\}.$$

Then by applying Theorem 4.2 to the case $Q = A$ we have

$$r(r(N)) = N, \tag{5}$$

since the semi-simple part of A coincides with $r(N)$, and $\lambda(\Phi_N) = N$.

Since Ae is indecomposable for every primitive idempotent e of A and is injective, its semi-simple part $r(N)e$ is simple by Theorem 3.1. Therefore if e' is another primitive idempotent of A, then by Corollary 2.2 we have

$$Ae \cong Ae' \Leftrightarrow r(N)e \cong r(N)e'. \tag{6}$$

From (6) we see that every simple left A-module is isomorphic to $r(N)e$ with a suitable idempotent e. Therefore we have by Theorem 4.1

$$r(N) = l(N). \tag{7}$$

For the character module of $r(N)e$ we have

$$\mathrm{Char}_A(r(N)e) \cong eA/r(r(N)e) \cap eA$$

since A is injective. From (5) it follows that $r(r(N)e) \cap eA = eN$. Hence we have

$$\mathrm{Char}_A(r(N)e) \cong eA/eN. \tag{8}$$

On the other hand, $\mathrm{Char}_A(eA/eN) \cong Ae \cap l(eN) = l(N)e$ and hence we have by (7)

$$\mathrm{Char}_A(eA/eN) \cong r(N)e. \tag{9}$$

Thus the character module of every simple left A-module and that of every simple right A-module are shown to be simple. Therefore we see by Theorem 2.1 in our previous paper [8] that A is quasi-Frobenius. This completes the proof of Theorem 5.1.

We shall give another characterization of quasi-Frobenius rings, which is closely connected with a result obtained in [8].

Theorem 5.2. A ring A which possesses the unit element and satisfies the minimum condition is quasi-Frobenius if and only if any module is isomorphic to a submodule of a direct sum of free A-modules (or projective module) (resp. any module is isomorphic to a quotient module of an injective module).

Proof. If A is quasi-Frobenius, projective modules are identical with injective modules. Conversely, suppose that any module is contained in a projective module. Let Q be any indecomposable injective module. Then there exists a projective module P containing Q. Since Q is injective, there exists a submodule Q_0 such that $P = Q \oplus Q_0$. Hence Q is projective. Since Q is indecomposable, Q is isomorphic to Ae with a suitable primitive idempotent e. Therefore A is injective as a left A-module, since by Lemma 3.4 there exists, for any simple module Ae'/Ne', an injective module Q such that $S(Q) \cong Ae'/Ne'$. This shows by Theorem 5.1 that A is quasi-Frobenius. The proof is carried out similarly for the case where any module is isomorphic to a quotient module of an injective module.

Added in proof. Prof. R. Brauer has communicated to one of the authors, in a reply to a letter in which some of our results were reported, that he had also obtained similar results as our Theorems 1.3, 2.3 and 3.1.

References

[1] Cartan, H., and S. Eilenberg: Homological algebras. Princeton Univ. Press 1956. — [2] Eilenberg, S.: Homological dimension and syzygies. Ann. of Math. **64**, 328—336 (1956). — [3] Eilenberg, S., and T. Nakayama: On the dimension of modules and algebras II (Frobenius algebras and quasi-Frobenius rings). Nagoya Math. J. **9**, 1—16 (1955). — [4] Deuring, M.: Algebren. Ergebn. Math. **4** (1934). — [5] Gaschütz, W.: Über den Fundamentalsatz von Maschke zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. Math. Z. **56**, 376—387 (1952). — [6] Ikeda, M., and T. Nakayama: On some characteristic properties of quasi-Frobenius and regular rings. Bull. Amer. Math. Soc. **60**, 15—19 (1954). — [7] Maclane, S.: Duality for groups. Bull. Amer. Math. Soc. **56**, 485—516 (1950). — [8] Morita, K., and H. Tachikawa: Character modules, submodules of a free module, and quasi-Frobenius rings. Math. Z. **65**, 414—428 (1956). — [9] Nagao, H., and T. Nakayama: On the structure of (M_0)- and (M_u)-modules. Math. Z. **59**, 164—170 (1953).

Dept. of Math., Tokyo University of Education, Tokyo (Japan)

(Eingegangen am 2. März 1957)

Chen, Yung-Ming
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 227—244 (1957)

Some Asymptotic Properties of Fourier Constants and Integrability Theorems

By

Chen Yung-Ming

1. The object of this paper is to prove some integrability theorems of functions defined by trigonometrical series and power series with monotone coefficients, and Laplace transforms of monotonic decreasing functions by the method of asymptotic approximations.

Suppose λ_n is positive and decreases steadily to zero as $n \to \infty$; then the series

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n \cos n x, \tag{1.1}$$

$$g(x) = \sum_1^\infty \lambda_n \sin n x \tag{1.2}$$

converge uniformly in any interval $0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta$. R. P. Boas ([*1*] (I), (III)), G. Sunouchi [*11*], B. Sz.-Nagy [*13*], S. Izumi and M. Satô [*8*], and P. Heywood ([*6*], (I), (II)) have investigated the necessary and sufficient conditions of the integrability of $x^{-\gamma} f(x)$ and $x^{-\gamma} g(x)$ in the sense of Lebesgue and in the sense of Cauchy. Those are only concerned with the asymptotic behaviour of functions on the right hand side of a singular point. From another point of view, in a previous note [*2*], the author has proved the following theorems:

Theorem (A). If $f(x)$ is defined by (1.1), $p > 1$, $0 < \gamma < 1$, then $x^{-\gamma}\{f(x)\}^p$ is integrable $L(0, \pi)$ if and only if

$$\sum n^{\gamma+p-2} \lambda_n^p < \infty. \tag{1.3}$$

Theorem (B). If $g(x)$ is defined by (1.2), $p > 1$, $0 < \gamma < 1$, then $x^{-\gamma}\{g(x)\}^p \in L(0, \pi)$ if and only if (1.3) is convergent. It may easily be seen that the „Geltungsbereich" of γ from these theorems can be extended to $1 - p < \gamma \leq 0$, from which when $\gamma = 0$ the results have previously been given by Hardy and Littlewood ([*5*] Theorem 5), [*4*]. I shall now state the following theorems:

Theorem 1. Under the same condition of Theorem (A), with the exception of $1 - p < \gamma < 0$, $x^{-\gamma}\{f(x)\}^p \in L(0, \pi)$ if and only if (1.3) is convergent.

Theorem 2. Under the same condition of Theorem (B), with the exception of $1 - p < \gamma < 0$, $x^{-\gamma}\{g(x)\}^p \in L(0, \pi)$ if and only if (1.3) is convergent.

For in the previous note [2], in the necessary condition (a) of the exampling proof, I assumed that $x^{-\gamma}\{g(x)\}^p \in L(0,\pi)$, $0<\gamma<1$. It follows then that $g(x)\in L^p(0,\pi)$; so that the function $g(x)$ defined by the series (1.2) can be term by term integrated. In fact, if we assume $1-p<\gamma<0$, $x^{-\gamma}\{g(x)\}^p\in L(0,\pi)$, we may use HÖLDER'S inequality to obtain

$$\left\{\begin{aligned}\int_0^\pi |g(t)|\,dt &= \int_0^\pi t^{-\gamma/p}\,|g(t)|\cdot t^{\gamma/p}\,dt\\ &\leq \left(\int_0^\pi t^{-\gamma}|g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^\pi t^{\gamma/(p-1)}\,dt\right)^{(p-1)/p}\\ &<\infty\,.\end{aligned}\right. \tag{1.4}$$

So we still have $g(x)\in L(0,\pi)$, and that the series (1.2) can be term by term integrated. By following the same argument, without any alteration, we may obtain the results just stated.

The method we have used in Theorem 1 and Theorem 2 is merely by certain asymptotic approximations analogous to the method given by HARDY and LITTLEWOOD. On the other hand, MULHOLLAND [*10*] has generalized a series of results of HARDY and LITTLEWOOD, and the kernel of his „Verschärfungsmethoden" is to use the function $\Phi(x)$ which is also of interest in the present paper.

Let $\Phi(x)$ be an increasing function, satisfying:

(1.5a) $\Phi(x)$ is a non-negative function, such that $\Phi(x)/x$ is increasing as x is increasing from zero to infinity;

(1.5b) There exists a positive constant $k>1$, such that $\Phi(x)/x^k$ is decreasing as x is increasing from zero to infinity.

2. Let us consider the following theorems, in which $\gamma=0$ are included in certain results of MULHOLLAND [*10*].

THEOREM 3. Under the same condition of Theorem (A) (i.e. $0<\gamma<1$), a sufficient condition[1]) of $x^{-\gamma}\Phi(|f(x)|)$ to be integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of the series

$$\sum n^{\gamma-2}\,\Phi(n\lambda_n)\,. \tag{2.1}$$

THEOREM 4. Under the same condition of Theorem (B), a necessary and sufficient condition that $x^{-\gamma}\Phi(|g(x)|)$ is integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of (2.1).

In particular cases, we have the following theorems which are also of interest.

THEOREM 5. If $m>0$, $0<\gamma<1$, then a sufficient condition that $x^{-\gamma}f(x)\left(1+\log^+ f(x)\right)^m$ is integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of

$$\sum_n n^{\gamma-1}\lambda_n(1+\log^+ n\lambda_n)^m. \tag{2.2}$$

[1]) Cf. § 7 (d) below, the condition is not necessary.

THEOREM 6. If $m>0$, $0<\gamma<1$, then a necessary and sufficient condition that $x^{-\gamma}g(x)\big(1+\log^+ g(x)\big)^m \in L(0,\pi)$ is the convergence of (2.2).

THEOREM 7. If $p>1$, $0<\gamma<1$, m is any real number, then a necessary and sufficient condition of $x^{-\gamma}\{g(x)\}^p\big(1+\log^+ g(x)\big)^m$ to be integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of

$$\sum_n n^{\gamma+p-2}\lambda_n^p(1+\log^+ n\lambda_n)^m. \tag{2.3}$$

THEOREM 8. If $p>1$, $0<\gamma<1$, m is any real number, then a sufficient condition of $x^{-\gamma}\{f(x)\}^p\big(1+\log^+ f(x)\big)^m$ to be integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of (2.3).

By combining Theorem 3 and Theorem 4, we have the following theorem concerning functions of a complex variable:

THEOREM 9. Suppose that (i) $0<\gamma<1$; (ii) $c_0\geq c_1\geq\cdots\to 0$;

$$A(\vartheta)=\sum_0^\infty c_n e^{ni\vartheta}. \tag{2.4}$$

Then a sufficient condition of $\vartheta^{-\gamma}\Phi\big(|A(\vartheta)|\big)$ to be integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of

$$\sum n^{\gamma-2}\Phi(nc_n). \tag{2.5}$$

Consider a special case of Theorem 9:

THEOREM 10. Under the same condition of Theorem 9, with $m>0$, $p\geq 1$, a sufficient condition that $\vartheta^{-\gamma}\{A(\vartheta)\}^p\big(1+\log^+ A(\vartheta)\big)^m$ is integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of

$$\sum_n n^{\gamma+p-2}c_n^p(1+\log^+ nc_n)^m. \tag{2.6}$$

3. Preliminary Lemmas. In the following seven lemmas, some of which are well-known, and since they have independent interest and are the kernels of our problems, I shall state more than what we actually need.

LEMMA 1 [*10*]. Let $\Phi(x)$ be the function defined in § 1, satisfying (1.5a) and (1.5b). If $c>1$, $\lambda_n\geq 0$, then

$$\sum_1^\infty n^{-c}\Phi(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\leq K\sum_1^\infty n^{-c}\Phi(n\lambda_n), \tag{3.1}$$

where $K=K(\Phi,c)$ depends on Φ and c.

LEMMA 2 [*10*]. Under the same condition of Lemma 1, and if

$$H(x)=\int_0^x h(t)\,dt \qquad \big(h(t)\geq 0\big), \tag{3.2}$$

then we have

$$\int_0^a x^{-c}\Phi\big(H(x)\big)\,dx\leq K\int_0^a x^{-c}\Phi\big(xh(x)\big)\,dx, \tag{3.3}$$

where $K=K(\Phi,c)$, $a\geq 0$.

LEMMA 3. Suppose $\Phi(x)$ is the function defined in § 1, satisfying (1.5a) and (1.5b), $c<1$, and that

$$\Re(x)=\int_x^a h(t)\,dt \qquad \big(h(t)\geqq 0,\ h(t)\in L(0,a)\big). \tag{3.4}$$

Then we have

$$\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(\Re(x)\big)\,dx \leqq K\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(x\,h(x)\big)\,dx, \tag{3.5}$$

where $K=K(\Phi,c)$, $a\geqq 0$.

Proof. Let us consider at first some properties of the function $\Phi(x)$. Let

$$\varphi(t)=\Phi(t)/t, \tag{3.6}$$

then $\varphi(t)$ is increasing as t is increasing from zero to infinity. Since $\Phi(t)$ is a monotonic increasing function, $\Phi'(t)$ exists almost everywhere in $(0,a)$ ([15] § 11.42). Differentiating (3.6), we obtain

$$\begin{cases} \Phi'(t)>\Phi(t)/t \\ \qquad =\varphi(t) \qquad (0<t\leqq a). \end{cases} \tag{3.7}$$

Since $\varrho(t)=\Phi(t)/t^k$ is decreasing, by differentiating $\varrho(t)$, we obtain

$$\Phi'(t)<k\,\Phi(t)/t=k\,\varphi(t) \qquad (k>1,\ 0<t\leqq a). \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(\Re(x)\big)\,dx \\ \displaystyle=(1-c)^{-1}a^{1-c}\,\Phi\big(\Re(a)\big)+(1-c)^{-1}\int_0^a x^{1-c}\,h(x)\,\Phi'\big(\Re(x)\big)\,dx \\ \displaystyle=(1-c)^{-1}\int_0^a x^{1-c}\,h(x)\,\Phi'\big(\Re(x)\big)\,dx \\ \displaystyle\leqq K\int_0^a x^{1-c}\,h(x)\,\varphi\big(\Re(x)\big)\,dx \\ \displaystyle=K\int_0^a x^{-c}\big\{x\,h(x)\,\varphi\big(\Re(x)\big)\big\}\,dx, \end{cases} \tag{3.9}$$

$K=K(\Phi,c)$ by (3.8). Let $t\geqq 1$. Since $\varphi(u)$ is increasing, we have

$$\begin{cases} x\,h(x)\,\varphi\big(\Re(x)\big)=t^{-1}\big\{t\,x\,h(x)\cdot\varphi\big(\Re(x)\big)\big\} \\ \qquad\qquad \leqq t^{-1}\,\mathrm{Max}\big\{t\,x\,h(x)\,\varphi\big(t\,x\,h(x)\big),\ \Re(x)\,\varphi\big(\Re(x)\big)\big\} \\ \qquad\qquad \leqq t^{-1}\big\{\Phi\big(t\,x\,h(x)\big)+\Phi\big(\Re(x)\big)\big\} \\ \qquad\qquad \leqq t^{k-1}\,\Phi\big(x\,h(x)\big)+t^{-1}\,\Phi\big(\Re(x)\big). \end{cases} \tag{3.10}$$

By substituting (3.10) in (3.9), we have

$$\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(\Re(x)\big)\,dx \leqq K\Big\{t^{k-1}\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(x\,h(x)\big)\,dx+t^{-1}\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(\Re(x)\big)\,dx\Big\}, \tag{3.11}$$

where $K = K(\Phi, c)$; from (3.11) we obtain

$$\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(\Re(x)\big)\,dx \leq \left\{\frac{K t^{k-1}}{1 - t^{-1}K}\right\} \int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(x\,h(x)\big)\,dx. \tag{3.12}$$

Finally we may assume $t > 1$ is sufficiently large and arbitrarily fixed. This completes the proof of Lemma 3.

4. Proof of Theorems 3—10 and Further Asymptotic Inequalities. In what follows I shall denote positive constants by K_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, either absolute constants or, if not specially mentioned, constants depending on certain functions and other numbers which are not necessary to explain in detail. I shall deduce an exampling proof of Theorem 4. The proof of Theorem 3 is analogous. It should be remarked that Theorems 5—10 are merely special cases of Theorem 3 and Theorem 4.

Let us denote

$$L_n = \sum_1^n \lambda_\nu. \tag{4.1}$$

We have

$$|g(x)| \leq K_1 L_n \text{ [2]} \qquad (\pi/(n+1) \leq x \leq \pi/n). \tag{4.2}$$

Denote $\Phi|u| = \Phi(|u|)$, in virtue of Lemma 1, we obtain

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\pi x^{-\gamma}\,\Phi|g(x)|\,dx \\ &\leq K_2 \sum_2^\infty \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} n^\gamma\,\Phi(L_n)\,dx \\ &\leq K_3 \sum_1^\infty n^{\gamma-2}\,\Phi(L_n) \\ &\leq K_4 \sum_1^\infty n^{\gamma-2}\,\Phi(n\lambda_n). \end{aligned}\right. \tag{4.3}$$

This completes the proof of the sufficient condition of Theorem 4.

For the proof of the necessary condition, we require the following lemma:

LEMMA 4. [3] $$\int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt \geq K n \lambda_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Proof. We have

$$g(t) \in L(1/n, \pi), \tag{4.4}$$

---

[2] Cf. ([2], § 2.11).

[3] I wish to take this opportunity of thanking the referee very gratefully for supplying this proof. This lemma was originally an unestablished relation given by the author in the form of a conjecture.

for every $n=1, 2, \ldots$. By ([16], p. 111, § 5.13),

$$
\left\{
\begin{aligned}
g(t) &= \sum_1^\infty \Delta\lambda_n \left\{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} \Big/ 2\sin\frac{t}{2} \\
&= \sum_1^\infty \Delta\lambda_n \left\{1 - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} \Big/ 2\sin\frac{t}{2} \\
&\quad + \sum_1^\infty \Delta\lambda_n \frac{\cos\frac{t}{2} - 1}{2\sin\frac{t}{2}} \\
&= \sum_1^\infty \Delta\lambda_n \frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{\lambda_1}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{4} \\
&= \mathrm{I} - \mathrm{II}.
\end{aligned}
\right. \tag{4.5}
$$

$$
|g(t)| \geq \mathrm{I} - \mathrm{II}. \tag{4.6}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt &\geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta\lambda_\nu \int_{1/n}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}}{t\sin\frac{t}{2}}\,dt - \frac{\lambda_1}{2}\int_{1/n}^{\pi} \frac{\operatorname{tg}\frac{t}{4}}{t}\,dt \\
&\geq C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta\lambda_\nu \int_{1/n}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}}{t^2}\,dt - C_2,
\end{aligned}
\right. \tag{4.7}
$$

where

$$
C_2 = \frac{\lambda_1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{tg}\frac{t}{4}}{t}\,dt. \tag{4.8}
$$

Here, we can take $n \leq \nu \leq 6n$, $\quad \frac{4\pi}{\nu+\frac{1}{2}} \geq \frac{2\pi}{\nu+\frac{1}{2}} \geq \frac{2\pi}{6n+\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{n}$.

$$
\left\{
\begin{aligned}
\int_{1/n}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}}{t^2}\,dt &\geq \int_{\frac{2\pi}{\nu+\frac{1}{2}}}^{\frac{4\pi}{\nu+\frac{1}{2}}} (\ldots)\,dt \\
&\geq \left(\frac{\nu+\frac{1}{2}}{4\pi}\right)^2 \int_{\frac{2\pi}{\nu+\frac{1}{2}}}^{\frac{4\pi}{\nu+\frac{1}{2}}} \sin^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}\,dt \\
&= \frac{\nu+\frac{1}{2}}{16\pi} \geq \frac{n}{16\pi}.
\end{aligned}
\right. \tag{4.9}
$$

If $\nu > 6n$, we have

$$(4.10)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{1/n}^{\pi} \cdots \geqq \int_{1/n}^{2,n} \cdots \\ \qquad \geqq \left(\frac{n}{2}\right)^2 \int_{1/n}^{2,n} \sin^2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}\,dt \\ \qquad = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\int_{1/n}^{2/n} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) t\,dt \right\} \\ \qquad \geqq \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\nu + \frac{1}{2}} \cdot 2 \right\} \geqq \frac{n}{12}\,. \end{cases}$$

It follows that

$$(4.11)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt \geqq C_1 \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\lambda_\nu \int_{1/n}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}}{t^2}\,dt - C_2 \\ \qquad \geqq C_3 \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\lambda_\nu \int_{1/n}^{\pi} \frac{dt}{t^2} - C_2 \qquad (n \geqq N) \\ \qquad \geqq C_4\, n\,\lambda_n - C_2\,. \end{cases}$$

If $g \not\equiv 0$, we have

$$(4.12)\qquad \int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt \geqq C_5 \qquad (n \geqq N)\,.$$

Now, if $n\lambda_n \geqq \frac{2C_2}{C_4}$ $(n \geqq N)$, then

$$(4.13)\qquad \int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt \geqq \frac{C_4}{2}\, n\lambda_n + C_2 - C_2 = \frac{C_4}{2}\, n\lambda_n\,.$$

If, for all n, $n\lambda_n < \frac{2C_2}{C_4}$, then we have

$$(4.14)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt \geqq C_5 \\ \qquad \geqq \dfrac{C_5}{\frac{2C_2}{C_4}} \cdot n\lambda_n \\ \qquad = \dfrac{C_4 C_5}{2C_2}\, n\lambda_n\,. \end{cases}$$

Therefore, in any case, we always have

$$(4.15)\qquad \int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt \geqq K\, n\lambda_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

After establishing Lemma 4, we are now in a position to prove the necessary condition. By the monotone properties (1.5a), (1.5b) of Φ and in virtue of Lemma 3, Lemma 4, we have

$$(4.16)\qquad \begin{cases} \sum n^{\gamma-2}\,\Phi(n\lambda_n) \leq K\sum n^{\gamma-2}\,\Phi\left(\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{|g(t)|}{t}\,dt\right) \\ \qquad\qquad \leq K\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} x^{-\gamma}\,\Phi\left(\int\limits_{x}^{\pi}\frac{|g(t)|}{t}\,dt\right)dx \\ \qquad\qquad \leq K\int\limits_{0}^{\pi} x^{-\gamma}\,\Phi\left(\int\limits_{x}^{\pi}\frac{|g(t)|}{t}\,dt\right)dx \\ \qquad\qquad \leq K\int\limits_{0}^{\pi} x^{-\gamma}\,\Phi\left(|g(x)|\right)dx. \end{cases}$$

This completes the proof of the necessary condition of Theorem 4.

Now we are considering another type of asymptotic approximations. Suppose $\Psi(x)$ is positive when x is positive, and satisfying:

(4.17a) $\Psi(x)$ is increasing to infinity when x is increasing from zero to infinity;

(4.17b) $\Psi(x)/x$ is decreasing to zero when x is increasing from zero to infinity.

Then we may prove the analogous lemmas for $\Psi(x)$. The argument may be given in the similar manner as in Lemmata 1—3. The results are:

LEMMA 5. If $c>1$, $\lambda_n \geq 0$, then

$$(4.18)\qquad \sum_{1}^{\infty} n^{-c}\,\Psi(\lambda_1+\cdots+\lambda_n) \geq K\sum_{1}^{\infty} n^{-c}\,\Psi(n\lambda_n),$$

where $K=K(\Psi, c)$.

LEMMA 6. If $c>1$, $0<a\leq\infty$, then

$$(4.19)\qquad \int_{0}^{a} x^{-c}\,\Psi\big(H(x)\big)\,dx \geq K\int_{0}^{a} x^{-c}\,\Psi\big(x\,h(x)\big)\,dx,$$

where $K=K(\Psi, c)$, $H(x)$ and $h(x)$ are defined by (3.2).

LEMMA 7. If $c<1$, $0<a\leq\infty$, then

$$(4.20)\qquad \int_{0}^{a} x^{-c}\,\Psi\big(\Re(x)\big)\,dx \geq K\int_{0}^{a} x^{-c}\,\Psi\big(x\,h(x)\big)\,dx,$$

where $K=K(\Psi, c)$, and $\Re(x)$ is defined by (3.4).

5. Asymptotic Integrability Theorems for Laplace Transforms of Monotonic Decreasing Functions. Let us suppose that the non-increasing function $\vartheta(t)$ is positive, and that $e^{-xt}\vartheta(t)$ is $L(0, \infty)$ for every positive value

of x. Denote the Laplace transform of $\vartheta(t)$ by ω:

$$\omega(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\vartheta(t)\,dt. \tag{5.1}$$

P. Heywood [7][4]) has proved two theorems concerning two necessary and sufficient conditions of $x^{-\gamma}\omega(x)$ to be integrable $L(0, 1)$ and $L(1, \infty)$ respectively:

Theorem (C). If $0<\gamma<1$, then $x^{-\gamma}\omega(x)\in L(0, 1)$ if and only if $t^{\gamma-1}\vartheta(t)\in L(1, \infty)$.

Theorem (D). If $0<\gamma<1$, then $x^{-\gamma}\omega(x)\in L(1, \infty)$ if and only if $t^{\gamma-1}\vartheta(t)\in L(0, 1)$.

It is natural to inquire: What are the corresponding theorems for $x^{-\gamma}\{\omega(x)\}^p$ [5]) and $x^{-\gamma}\Phi(\omega(x))$? And this is just what we require to know:

Theorem 11. Suppose that $\Phi(x)$ is the given function given in § 1, satisfying (1.5a) and (1.5b), that $-\infty<\gamma<1$, and that

(i) $e^{-xt}\vartheta(t)\in L(0, \infty)$ $(x>0)$;

(ii) $\vartheta(t)>0$, as $t>0$, and is a non-increasing function;

(iii) $\omega(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\vartheta(t)\,dt$.

Then $x^{-\gamma}\Phi(\omega(x))$ is integrable $L(0, 1)$ if and only if

$$t^{\gamma-2}\,\Phi\left(t\vartheta(t)\right)\in L(1, \infty). \tag{5.2}$$

By the method of asymptotic approximations, we can expand the function $\omega(x)$ as the sum of the sequence of functions in the following form:

$$\left\{\begin{aligned}\omega(x) &= \sum_0^\infty \int_n^{n+1} e^{-xt}\vartheta(t)\,dt\\ &= \sum_0^\infty h_n(x)\,e^{-nx}\\ &= \sum_0^\infty h_n(x)\,(e^{-x})^n,\end{aligned}\right. \tag{5.3}$$

where

$$\vartheta(n)\geq h_n(x)\geq e^{-x}\vartheta(n+1)>0 \qquad (0\leq x<1), \tag{5.4}$$

and

$$h_0(x)<\infty \qquad (0\leq x<1)\ [6]). \tag{5.5}$$

(a) To show that the condition is necessary: Suppose $x^{-\gamma}\Phi(\omega(x))\in L(0, 1)$. Then it follows that $\omega(x)\in L(0, 1)$.

$$\int_1^\infty t^{\gamma-2}\,\Phi\left(t\vartheta(t)\right)dt \leq K_5\sum_1^\infty n^{\gamma-2}\,\Phi\left(n\vartheta(n)\right). \tag{5.6}$$

[4]) For particular cases, cf. also ([14] formulae 350, 360).

[5]) For $\gamma=0$, cf. Hardy and Littlewood ([3] Theorem 23 with $p=q$).

[6]) Since $e^{-1}\int_0^1\vartheta(t)\,dt<\omega(1)<\infty$; $\quad\vartheta(t)\in L(0, 1)$.

Let

$$\tau(x) = \int_x^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt \qquad (0 \leqq x < 1). \tag{5.7}$$

By (5.3) and (5.4), we have

$$\begin{cases} \tau(n^{-1}) = \int\limits_{1/n}^{1} \dfrac{\omega(t)}{t}\, dt \\ \qquad \geqq K_6 \sum\limits_{m=1}^{\infty} \int\limits_{1/n}^{1} t^{-1} \vartheta(m)\, e^{-mt}\, dt \\ \qquad \geqq K_6 \sum\limits_{m=1}^{n} \int\limits_{1}^{n} s^{-1} \vartheta(m)\, e^{-ms/n}\, ds \\ \qquad \geqq K_6\, n\, \vartheta(n) \int\limits_{1}^{n} s^{-1} e^{-s}\, ds \\ \qquad \geqq K_7\, n\, \vartheta(n) \qquad (n = 2, 3, \ldots). \end{cases} \tag{5.8}$$

Combining (5.6) and (5.8), and in virtue of Lemma 3, we have:

$$\begin{cases} \int\limits_{1}^{\infty} t^{\gamma-2}\, \Phi\big(t\vartheta(t)\big)\, dt \leqq K_8 \sum\limits_{1}^{\infty} n^{\gamma-2}\, \Phi\big(\tau(n^{-1})\big)^{7}) \\ \qquad \leqq K_9 \sum\limits_{1}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^{-\gamma}\, \Phi\big(\tau(x)\big)\, dx \\ \qquad \leqq K_9 \int\limits_{0}^{1} x^{-\gamma}\, \Phi\big(\tau(x)\big)\, dx \\ \qquad \leqq K_{10} \int\limits_{0}^{1} x^{-\gamma}\, \Phi\big(\omega(x)\big)\, dx. \end{cases} \tag{5.9}$$

This completes the proof of the necessary condition (a).

(b) To show that the condition is sufficient:

When $\dfrac{1}{n+1} \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$,

$$\begin{cases} \omega(x) = \int\limits_{0}^{n+1} e^{-xt}\, \vartheta(t)\, dt + \int\limits_{n+1}^{2(n+1)} + \int\limits_{2(n+1)}^{3(n+1)} + \cdots \\ \qquad \leqq \left(\dfrac{e}{e-1}\right) \int\limits_{0}^{n+1} e^{-xt}\, \vartheta(t)\, dt \\ \qquad = \left(\dfrac{e}{e-1}\right) \sum\limits_{0}^{n+1} h_i(x)\, (e^{-x})^i \\ \qquad \leqq K_{11} \sum\limits_{m=1}^{n} \vartheta(m), ^{8}) \end{cases} \tag{5.10}$$

[7]) Since $1 \cdot \vartheta(1) \leqq k \cdot 2 \cdot \vartheta(2)$, the first term in the summation may be neglected. By (5.8), (1.5a), (1.5b) it follows that $\Phi(n\,\vartheta(n)) \leqq K\, \Phi(\tau(n^{-1}))$.

[8]) In virtue of (5.4), (5.5), and (ii) of Theorem 11, the first term $\vartheta(0)$ and the last term $\vartheta(n+1)$ may be neglected.

where $K_{11}=K_{11}(\vartheta)$. By Lemma 1, we obtain

$$(5.11)\quad \begin{cases} \int_0^1 x^{-\gamma}\Phi\big(\omega(x)\big)\,dx = \sum_1^\infty \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^{-\gamma}\Phi\big(\omega(x)\big)\,dx \\ \qquad \leqq K_{12}\sum_1^\infty n^{\gamma-2}\Phi\big(\vartheta(1)+\vartheta(2)+\cdots+\vartheta(n)\big) \\ \qquad \leqq K_{13}\sum_1^\infty n^{\gamma-2}\Phi\big(n\vartheta(n)\big) \\ \qquad \leqq K_{14}\int_1^\infty t^{\gamma-2}\Phi\big(t\vartheta(t)\big)\,dt. \end{cases}$$

Thus the proof of the sufficient condition of Theorem 11 is complete. It is very interesting to consider some special cases of Theorem 11:

THEOREM 12. Under the same condition of Theorem 11, and in addition, if $p\geqq 1$, $m>0$, then

$$(5.12)\qquad x^{-\gamma}\big(1+\log^+\omega(x)\big)^m\{\omega(x)\}^p\in L(0,1)$$

if and only if

$$(5.13)\qquad t^{\gamma+p-2}\{\vartheta(t)\}^p\big(1+\log^+ t\vartheta(t)\big)^m\in L(1,\infty).$$

In particular case,

THEOREM 13. If $p>1$, $-\infty<\gamma<1$, then $x^{-\gamma}\{\omega(x)\}^p$ is integrable $L(0,1)$ if and only if $t^{\gamma+p-2}\{\vartheta(t)\}^p$ is integrable $L(1,\infty)$.

Corresponding to Theorem (D), we shall now prove the following theorem:

THEOREM 14. Under the same condition of Theorem 11 (i.e. $-\infty<\gamma<1$),

$$(5.14)\qquad x^{-\gamma}\Phi\big(\omega(x)\big)\in L(1,\infty)$$

if and only if

$$(5.15)\qquad t^{\gamma-2}\Phi\big(t\vartheta(t)\big)\in L(0,1).$$

Proof. (a) To show that the condition is necessary:

$$(5.16)\quad \begin{cases} \omega(n)=\int_0^\infty e^{-nt}\vartheta(t)\,dt \\ \qquad \geqq e^{-1}\int_0^{\frac{1}{n}}\vartheta(t)\,dt \\ \qquad \geqq K_{15}\vartheta(1/n)/n, \end{cases}$$

$$(5.17)\quad \begin{cases} \int_0^1 t^{\gamma-2}\Phi\big(t\vartheta(t)\big)\,dt=\sum_1^\infty \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t^{\gamma-2}\Phi\big(t\vartheta(t)\big)\,dt \\ \qquad \leqq K_{16}\sum_1^\infty n^{-\gamma}\Phi\big(\vartheta(1/n)/n\big) \\ \qquad \leqq K_{17}\sum_1^\infty n^{-\gamma}\Phi\big(\omega(n)\big) \\ \qquad \leqq K_{18}\int_1^\infty x^{-\gamma}\Phi\big(\omega(x)\big)\,dx. \end{cases}$$

(b) To show that the condition is sufficient: Denote

$$\Theta(t) = \int_0^t \vartheta(u)\,du. \tag{5.18}$$

$$\left\{\begin{aligned} \omega(1/t) &= \int_0^\infty e^{-u/t}\,\vartheta(u)\,du \\ &\leq \int_0^t \cdots + \vartheta(t)\int_t^\infty e^{-u/t}\,du \\ &\leq \int_0^t \vartheta(u)\,du + t\,\vartheta(t) \\ &\leq 2\Theta(t). \end{aligned}\right. \tag{5.19}$$

By putting $x = 1/t$, and in virtue of Lemma 2, we therefore have:

$$\left\{\begin{aligned} \int_1^\infty x^{-\gamma}\,\Phi\big(\omega(x)\big)\,dx &= \int_0^1 t^{\gamma-2}\,\Phi\big(\omega(1/t)\big)\,dt \\ &\leq K_{19}\int_0^1 t^{\gamma-2}\,\Phi\big(\Theta(t)\big)\,dt \\ &\leq K_{20}\int_0^1 t^{\gamma-2}\,\Phi\big(t\,\vartheta(t)\big)\,dt. \end{aligned}\right. \tag{5.20}$$

Thus the proof of the sufficient condition of Theorem 14 is complete. It is also of interest to consider some special cases of Theorem 14:

THEOREM 15. If $p>1$, $-\infty<\gamma<1$, then $x^{-\gamma}\{\omega(x)\}^p \in L(1,\infty)$ if and only if $t^{\gamma+p-2}\{\vartheta(t)\}^p \in L(0,1)$.

THEOREM 16. If $p\geq 1$, $m>0$, $-\infty<\gamma<1$, then

$$x^{-\gamma}\{\omega(x)\}^p\big(1+\log^+\omega(x)\big)^m \in L(1,\infty) \tag{5.21}$$

if and only if

$$t^{\gamma+p-2}\{\vartheta(t)\}^p\big(1+\log^+\vartheta(t)\big)^m \in L(0,1). \tag{5.22}$$

6. Analogous Theorems for Power Series of Monotonic Decreasing Coefficients. The following theorem was proved by HARDY and LITTLEWOOD ([3] Theorem 15)[9]:

THEOREM (E). Suppose that c_n is positive for all values of n, that the radius of convergence of the series $\sum c_n x^n$ is at least 1, that $F(x)$ is defined by

$$F(x) = \sum_0^\infty c_n x^n, \tag{6.1}$$

[9] Cf. also HEYWOOD ([7] Theorem 1).

for $0 \leqq x < 1$, and that $0 < \gamma < 1$. Then $(1-x)^{-\gamma} F(x) \in L(0, 1)$ if and only if $\sum n^{\gamma-1} c_n$ is convergent.

It is natural to inquire: What is the corresponding theorem for $(1-x)^{-\gamma} \Phi(F(x))$? I shall now prove an analogous theorem for power series of monotone coefficients.

THEOREM 17. Suppose that c_n is positive or zero and is ultimately non-increasing[10]), that $F(x)$ is defined by (6.1) for $0 \leqq x < 1$, and that $-\infty < \gamma < 1$. Then

$$(1-x)^{-\gamma} \Phi(F(x)) \in L(0, 1) \tag{6.2}$$

if and only if

$$\sum n^{\gamma-2} \Phi(n c_n) < \infty. \tag{6.3}$$

In particular,

THEOREM 18. Under the same condition of Theorem 17, with $m > 0$, $p \geqq 1$, $1-p \leqq \gamma < 1$,

$$(1-x)^{-\gamma} \{F(x)\}^p \left(1 + \log^+ F(x)\right)^m \in L(0, 1) \tag{6.4}$$

if and only if

$$\sum_n n^{\gamma+p-2} c_n^p (1 + \log^+ n c_n)^m < \infty. \tag{6.5}$$

It can easily be seen from the following argument that the result of Theorem 17 is still valid if a finite number of the coefficients c_n are negative[11]). Theorem 17 breaks down when $\gamma = 1$. This may be justified by setting $F(x) \equiv 1$. For the sake of clarity, and without loss of generality, we now assume $c_0 \geqq c_1 \geqq \cdots$.

Proof of Theorem 17. (a) To show that the condition is necessary: Setting $1-x = y$, in virtue of

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}, \tag{6.6}$$

we have, if $1/n \leqq y \leqq 1/(n+1)$,

$$\begin{cases} F(1-y) \geqq K_{21} \sum_1^n c_i (1-y)^i \\ \qquad\quad \geqq K_{21} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sum_1^n c_i \\ \qquad\quad \geqq K_{22} n c_n \qquad (n \geqq 2), \end{cases} \tag{6.7}$$

[10]) It follows that the radius of convergence of the series $\sum c_n x^n$ is at least 1;

$$(1-x)^{-\gamma} \{F(x)\}^p \in L(0, 1) \quad (p > 1, \gamma < 1 - p).$$

[11]) Cf. ([2] § 2, Remark 1), the function $F(x)$ should be replaced by its absolute value.

$$
(6.8)\qquad \begin{cases} \sum n^{\gamma-2}\,\Phi(n\,c_n) \leqq K_{23}\int\limits_1^{\infty} t^{\gamma-2}\,\Phi(t\,c_{[t]})\,dt \\ \qquad\qquad \leqq K_{24}\int\limits_0^{1} u^{-\gamma}\,\Phi(c_{[1/u]}/u)\,du \\ \qquad\qquad \leqq K_{25}\sum\limits_1^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} u^{-\gamma}\,\Phi(n\,c_n)\,du \\ \qquad\qquad \leqq K_{26}\int\limits_0^{1} y^{-\gamma}\,\Phi\big(F(1-y)\big)\,dy \\ \qquad\qquad \leqq K_{26}\int\limits_0^{1} (1-x)^{-\gamma}\,\Phi\big(F(x)\big)\,dx. \end{cases}
$$

Hence the result follows at once.

(b) To show that the condition is also sufficient[12]): For the sake of simplicity and without loss of generality, we may assume $c_0 = 0$. Suppose $\sum n^{\gamma-2}\,\Phi(n\,c_n) < \infty$. Denote $S_n = c_1 + \cdots + c_n$. We have

$$
(6.9)\qquad \begin{cases} F(1-y) \leqq \sum\limits_1^{n} c_i + \sum\limits_{n+1}^{\infty} c_i\,(1-y)^i \\ \qquad\qquad \leqq S_n + c_n/y \\ \qquad\qquad \leqq K_{27}\,S_n \quad \left(\dfrac{1}{n+1} \leqq y \leqq \dfrac{1}{n}\right). \end{cases}
$$

By Lemma 1, we have

$$
(6.10)\qquad \begin{cases} \int\limits_0^{1} (1-x)^{-\gamma}\,\Phi\big(F(x)\big)\,dx = \sum\limits_1^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} y^{-\gamma}\,\Phi\big(F(1-y)\big)\,dy \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \leqq K_{28}\sum\limits_1^{\infty} n^{\gamma-2}\,\Phi(S_n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \leqq K_{29}\sum\limits_1^{\infty} n^{\gamma-2}\,\Phi(n\,c_n), \end{cases}
$$

where $K_{29} = K_{29}(\Phi, \gamma)$. Thus the proof of the sufficient condition (b) of Theorem 17 is complete.

7. Negative Results. (a) Our arguments in Theorem 1 and Theorem 2 become invalid when we put $\gamma = 1 - p$, which is the critical point of the „Geltungsbereich" of γ. I shall now illustrate it by two examples:

(i) $$\lambda_n = (\log n)^{-1}, \qquad p > 1, \qquad \sum n^{\gamma+p-2}\,\lambda_n^p < \infty.$$

[12]) In particular, when $\Phi(u) = u^p$, cf. HARDY and LITTLEWOOD ([3] Theorem 3, with $\frac{1}{q} - 1 = -\gamma$, $r = p$).

We have $g(x) \sim 1/(x \cdot |\log x|)$, as $x \to 0$ ([16] § 5.221). We therefore have $x^{p-1}\{g(x)\}^p \in L(0, \pi)$. But since $g(x) \overline{\in} L(0, \pi)$, the series (1.2) is not a Fourier series[13]), so that it cannot be term by term integrated; therefore, the previous argument cannot be applied.

(ii) If we put $\lambda_n = (\log n)^{-\frac{1}{3}}$, then we have, by ([16], § 5.221),

$$f(x) \sim x^{-1}(\log(1/x))^{-\frac{1}{3}}. \tag{7.1}$$

Take $p = \frac{4}{3}$, $\gamma = 1 - p$, then $\sum n^{\gamma+p-2}\lambda_n^p$ is obviously divergent. But yet $x^{p-1}\{f(x)\}^p \in L(0, \pi)$. Thus, Theorem 1 breaks down when $\gamma = 1 - p$.

(b) In Theorem 17, with $\gamma = 0$, it is impossible to eliminate the monotone property of the sequence c_n. In fact, there exists $F(x) = \sum c_n x^n$, with $F(x) \in L^2(0, 1)$ and $\sum c_n^2$ is divergent ([3], § 1.2). In case $\gamma = \varepsilon > 0$, we may follow the same reasoning by assuming $c_{n'} = n^{-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}}$, $p = 2$. Then $\sum (n')^{\gamma+p-2} c_{n'}^2 \geqq \sum (n \log n)^{-1} \to \infty$. After establishing the divergence of the series $\sum (n')^{\gamma+p-2} c_{n'}^p$, we may chose $n' = n'(n)$ sufficiently large, in order to make the lacunary series $\sum c_{n'} x^{n'} \sim (1-x)^{-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\delta}$. Then we can make $(1-x)^{-\gamma}\{F(x)\}^2 \in L(0, 1)$. Therefore the monotone property of c_n in Theorem 17 cannot be eliminated even when $0 < \gamma < 1$.

(c) Although the second type of asymptotic approximations has not yet been intensively investigated. I shall now lay out one preliminary result: In particular, when the function $\Psi(u) = u^p$, $0 < p < 1$, Theorem (A) breaks down[14]). For let us take $\lambda_n = (\log n)^{-1}$, $p = \frac{3}{4}$, $\gamma = \frac{1}{4}$, then $f(x) \sim 1/x(\log x)^2$. Although $x^{-\gamma}\{g(x)\}^p \overline{\in} L(0, \pi)$ (i.e. $\sum n^{\gamma+p-2}\lambda_p^n$ is divergent), we still have: $x^{-\gamma}\{f(x)\}^p \in L(0, \pi)$. Therefore, we can assert that there is no corresponding theorem for $f(x)$ when $\Psi(f(x))$ or, in particular, when $\{f(x)\}^p$ $(0 < p < 1)$ is used. And the problem concerning $f(x)$ is disposed of.

(d) We have proved the sufficient conditions of the integrability of $x^{-\gamma}\Phi(|g(x)|)$ and $x^{-\gamma}\Phi(|f(x)|)$. It is natural to inquire for the necessary condition of Theorem 3. But, unfortunately, the result is negative: Not only the inequality

$$\int_{1/n}^{\pi} \frac{|f(t)|}{t}\, dt \geqq K\lambda_n \tag{7.2}$$

cannot always be satisfied, but also the convergence of $\sum n^{\gamma-2}\Phi(n\lambda_n)$ is not always necessary for $x^{-\gamma}\Phi(|f(x)|)$ to be integrable $L(0, \pi)$.

For the „Gegenbeispiel", it should be remarked that our argument of Theorem 4 is still applicable for $\gamma = 0$. So it is enough to illustrate an example for $\gamma = 0$.

---

[13]) For cosine series, given $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \to 0$, we cannot assure that $\sum \lambda_n \cos nx$ is a Fourier-Lebesgue series [12].

[14]) Cf. ([2] Theorem 3).

Setting $\gamma = 0$,

$$\lambda_n = (\log n)^{-1}, \tag{7.3}$$

$$\Phi(u) = u(1 + \log^+ u)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.4}$$

We have, as in (a), $f(x) \sim x^{-1}|\log x|^{-2}$, as $x \to 0$.

$$x^{-\gamma}\Phi(|f(x)|) \sim x^{-1}|\log x|^{-\frac{3}{2}} \in L(0, \pi). \tag{7.5}$$

But

$$\begin{cases} \sum n^{\gamma-2}\Phi(n\lambda_n) = \sum n^{-2} \cdot n(\log n)^{-1}\left(1 + \log^+[n(\log n)^{-1}]\right)^{\frac{1}{2}} \\ \qquad = \sum n^{-1}(\log n)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - o(1)\right) \to \infty. \end{cases} \tag{7.6}$$

Thus, the condition of Theorem 3 is certainly not necessary.

8. Further Integrability Theorems. Applying Theorem 3 and Theorem 4 to the Riemann-Liouville fractional integrals, we obtain

THEOREM 19. If $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \to 0$, $c_0 = 0$, $\alpha > 0$, $0 < \gamma < 1$,

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n e^{2\pi i n x}}{(2\pi i n)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x-t)\, t^{\alpha-1}\, dt, \tag{8.1}$$

then a sufficient condition that $x^{-\gamma}\Phi|f_\alpha(x)| \in L(0, 1)$ is the convergence of the series

$$\sum n^{\gamma-2}\Phi(n^{1-\alpha}c_n). \tag{8.2}$$

The following theorem is due to HARDY and LITTLEWOOD ([5], Theorem 11):

THEOREM (F). Suppose that $f(\vartheta) \sim \sum c_n e^{ni\vartheta}$, and that $|f| \cdot \log^+|f|$ belongs to L. Then $\sum c_n^*/n$ is convergent and $\sum \exp(-k|c_n|)$ is convergent for every positive value of k, where $\{c_n^*\}$ is the rearrangement of $\{c_n\}$. It may be seen that, if c_n are real, we actually have:

THEOREM (G)[15].

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{|f(\vartheta)|}\, d\vartheta \leq A(k) \sum_1^\infty n^{-2} \exp\Big(k \sum_{-n}^{n} c_m^*\Big). \tag{8.3}$$

For $e^{|f(\vartheta)|} = 1 + |f(\vartheta)| + \frac{|f(\vartheta)|^2}{2!} + \cdots$. By applying HEYWOOD's theorem [6], Theorem (A), and Theorem (B), it is easy to verify the following more general theorem:

THEOREM 20. Suppose $c_0 \geq c_1 \geq \cdots \to 0$, $0 < \gamma < 1$,

$$f(\vartheta) \sim \sum_0^\infty c_n e^{ni\vartheta}. \tag{8.4}$$

Then

$$\int_{-\pi}^{\pi} \vartheta^{-\gamma} e^{|f(\vartheta)|}\, d\vartheta < \infty \tag{8.5}$$

[15]) Cf. HARDY and LITTLEWOOD ([5] Theorem 9).

if and only if

$$\sum n^{\gamma-2} \exp(n c_n) < \infty. \tag{8.6}$$

By a similar argument, and in virtue of Theorem (E) and Theorem 17, we obtain

THEOREM 21. Under the same condition of Theorem 20, except that $-\infty < \gamma < 1$, $F(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$, a necessary and sufficient condition that

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{-\gamma} e^{F(x)} dx < \infty \tag{8.7}$$

is the convergence of the series (8.6).

THEOREM 22. Under the same condition of Theorem 21, with an addition that $\omega(x)$ is the function defined in § 5,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{-\gamma} e^{\omega(x)} dx < \infty \tag{8.8}$$

if and only if

$$\int_1^\infty t^{\gamma-2} \exp(t\vartheta(t)) dt < \infty. \tag{8.9}$$

Another type of integrability theorems can be obtained by integration with respect to the variable p. I shall now illustrate an example for Theorem 18:

THEOREM 23. If $1-p_2 < \gamma < 1$, $p_2 > p_1 > 1$, $m > 0$, $F(x)$ is defined by (6.1), then

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{-\gamma}(1+\log^+ F(x))^m \{[F(x)]^{p_2} - [F(x)]^{p_1}\}}{\log F(x)} dx < \infty \tag{8.10}$$

if and only if

$$\sum_n n^{\gamma-2}(1+\log^+ n c_n)^m \left\{\frac{n^{p_2} c_n^{p_2} - n^{p_1} c_n^{p_1}}{\log(n c_n)}\right\} < \infty. \tag{8.11}$$

Further analogous theorems for power series, trigonometrical series, and Laplace transforms can be obtained in this way.

Finally, I wish to express my thanks to the referee who suggested to me to work toward asymptotic approximations from the results of the original draft of this paper.

References

[1] BOAS, R. P., Jr.: Integrability of trigonometric series. I. Duke Math. J. **18**, 787—793 (1951). — III. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **3**, 217—221 (1952). — [2] CHEN, Y. M.: On the integrability of functions defined by trigonometrical series. Math. Z. **66**, 9—12 (1956). — [3] HARDY, G. H., u. J. E. LITTLEWOOD: Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions. J. f. Math. **156**, 141—158 (1927). — [4] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants. Math. Ann. **97**, 159—209 (1926). — [5] HARDY, G. H.,

and J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants. J. London Math. Soc. **6**, 3—9 (1931). — [*6*] HEYWOOD, P.: On the integrability of functions defined by trigonometric series. I. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **5**, 71—76 (1954). — II. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **6**, 77—79 (1955). — [*7*] HEYWOOD, P.: Integrability theorems for power series and Laplace transforms. J. London Math. Soc. **30**, 302—310 (1955). — [*8*] IZUMI, S., and M. SATÔ: Integrability of trigonometrical series. I. Tôhoku Math. J. (2) **6** 258—263 (1954). — [*9*] KENNEDY, P. B.: Integrability theorems for power series. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **6**, 316—320 (1955). — [*10*] MULHOLLAND, H. P.: Concerning the generalization of the Young-Hausdorff theorem. Proc. London Math. Soc. **35**, 257—293 (1933). — [*11*] SUNOUCHI, G.: Integrability of trigonometrical series. J. of Math. (Tokyo) **1**, 99—103 (1953). — [*12*] SZIDON, S.: Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen. Math. Z. **12**, 121—127 (1921). — [*13*] SZ.-NAGY, B.: Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées. Acta Sci. Math. (Szeged) **13**, 118—135 (1949). — [*14*] HARDY, G. H., J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA: Inequalities. Cambridge 1952. — [*15*] TITCHMARSH, E. C.: The Theory of Functions. Oxford 1939. — [*16*] ZYGMUND, A.: Trigonometrical Series. Warszawa-Lwów 1935.

Math. Dept., Nanyang University, Singapore

(Eingegangen am 7. März 1957)

Stallmann, F.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 245—266 (1957)

Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. III *)

Von
Friedemann Stallmann

Einleitung

Im folgenden werden wir mit den in I[1]) und II[2]) entwickelten Methoden die Lamésche Differentialgleichung untersuchen. Im Gegensatz zu den mehr geometrisch anschaulichen Betrachtungen in I, 3.1 bis 3.3 soll hier die numerische Berechnung der charakteristischen Zahlen bei geschlossenen Umläufen gemäß I, 1.5 bis 1.6 im Vordergrund stehen. Ferner soll der bisher noch nicht behandelte Fall der Laméschen Differentialgleichung bei großen Werten δ genauer diskutiert werden. Für genauere numerische Rechnungen ziehen wir die in II untersuchten hypergeometrischen Funktionen als Hilfsfunktionen heran. Auch Fehlerabschätzungen werden durchgeführt.

Die Bezeichnungen aus den beiden ersten Teilen werden unverändert übernommen und auch die Numerierung der Paragraphen wie bisher weitergeführt. Es beziehen sich also die Hinweise auf § 1 bis § 3 auf Teil I, § 4 bis § 10 auf Teil II und § 11 bis § 12 auf den vorliegenden Teil III. Entsprechendes gilt natürlich auch für die zitierten Formeln.

§ 11. Die Lamésche Differentialgleichung. Allgemeines und asymptotische Integration für kleine Werte δ

11.1. Wir legen unseren Betrachtungen wieder die Form (3.1) der Laméschen Differentialgleichung zugrunde. Da wir uns aber zunächst auf keine bestimmte Form der Liouville-Transformation festlegen wollen, schreiben wir sie mit b statt ϱ^2, wo b nur reell sein soll. Sie erhält dann die Form:

$$\frac{y''}{y} = -\frac{3}{16}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{1}{(x-e_\nu)^2} + \frac{(\frac{5}{4}+\delta^2)\,x+b}{4\prod_{\nu=1}^{3}(x-e_\nu)}. \tag{11.1.1}$$

Es sei wieder

$$e_1 = \frac{2-k^2}{3}, \quad e_2 = \frac{2k^2-1}{3}, \quad e_3 = -\frac{1+k^2}{3}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1. \tag{11.1.2}$$

Wie in 3.2 erwähnt, bildet der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen von (11.1.1) die obere Halbebene auf ein Kreisbogenviereck ab, wobei die Stellen $x = e_1, e_2, e_3$ in Winkel der Größe $\pi/2$ und die Stelle $x = \infty$

*) Der vorliegende Teil III bildet zusammen mit Teil II die Habilitationsschrift des Verfassers, die von der naturwissenschaftlichen Fakultät der Justus-Liebig-Hochschule Gießen angenommen wurde.

[1]) Math. Z. **60**, 187—212 (1954).

[2]) Math. Z. **68**, 27—76 (1957).

in einen Winkel der Größe $\delta\pi$ übergeht. Im Gegensatz zu den bisher behandelten Kreisbogendreiecken sind die Kreisbogenvierecke durch die Angabe der Eckenwinkel noch nicht eindeutig bis auf eine lineare Transformation bestimmt. Die Gestalt des Kreisbogenvierecks hängt noch ab von den beiden Winkeln zwischen den Paaren gegenüberliegender Seiten, wobei noch die Überdeckungsverhältnisse in der η-Ebene zu berücksichtigen sind. Hiermit hängt es zusammen, daß in (11.1.1) außer δ noch zwei weitere Parameter frei gewählt werden können, nämlich das Doppelverhältnis der Verzweigungspunkte k^2 und der akzessorische Parameter b. Die Abhängigkeit des Vierecks von diesen Parametern haben wir uns auf geometrischem Wege in 3.2 veranschaulicht. Hier wollen wir diese Überlegungen durch numerische Abschätzungen der Winkelgrößen ergänzen.

Wir gehen hierzu aus von den Überlegungen in 1.5 und 1.6. Die gesuchten Winkelgrößen sind im wesentlichen die charakteristischen Exponenten zu gewissen geschlossenen Umläufen der Lösungen von (11.1.1) in der x-Ebene. Wir betrachten speziell einen Weg, der die singulären Stellen e_1 und e_2 aber nicht e_3 umschließt, sowie einen Weg, der e_2 und e_3 aber nicht e_1 umschließt. Die zugehörigen Winkelgrößen bezeichnen wir bzw. mit δ_{12} und δ_{23}. Es schneiden sich dann nach 1.6 die Paare gegenüberliegender Seiten unter den Winkeln $\pi\delta_{12}$ und $\pi\delta_{23}$.

Zur Berechnung dieser Winkelgrößen benutzen wir die Formel (1.11) Da wir die Lösungen der Differentialgleichung (11.1.1) mit Hilfe der asymptotischen Integration abschätzen, schreiben wir (1.11) in eine Formel für die durch die Liouville-Transformation aus den $y(x)$ entstandenen $u(\xi)$ um. Bei dieser Transformation geht der geschlossene Weg in der x-Ebene in einen im allgemeinen offenen Weg in der ξ-Ebene über. ξ_1 sei der — in weitem Umfang willkürlich wählbare — Anfangspunkt, ξ_2 der Endpunkt dieses Weges. Die Größe $\sqrt[4]{\varphi(x)}$ nehme bei dem geschlossenen Umlauf in der x-Ebene den Faktor $e^{\frac{i\pi}{2}r}$ $(r=0, 1, 2, 3)$ an. Unter diesen Voraussetzungen erhält Formel (1.11) die Gestalt:

$$\text{(11.1.3)}\qquad \left\{\begin{aligned}\cos\pi\delta = -\frac{1}{2W(u_1, u_2)}\Bigg(& \begin{vmatrix} u_1(\xi_1), & e^{-\frac{i\pi}{2}r}u_2(\xi_2) \\ u_1'(\xi_1), & e^{\frac{i\pi}{2}r}u_2'(\xi_2)\end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} e^{-\frac{i\pi}{2}r}u_1(\xi_2), & u_2(\xi_1) \\ e^{\frac{i\pi}{2}r}u_1'(\xi_2), & u_2'(\xi_1)\end{vmatrix}\Bigg).\end{aligned}\right.$$

Bei geeigneter Wahl der Anfangspunkte und Integrationswege lassen sich die $u_{1,2}(\xi_{1,2})$ mit Hilfe der asymptotischen Integration abschätzen. Die $u_{1,2}'(\xi_{1,2})$ schätzen wir ab mit Hilfe der Formel

$$\text{(11.1.4)}\qquad u'(\xi) = v'(\xi) + \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{v_1(\zeta)\, v_2'(\xi) - v_2(\zeta)\, v_1'(\xi)}{W(v_1, v_2)}\, q(\zeta)\, u(\zeta)\, d\zeta,$$

die wir aus (2.16) durch Ableitung erhalten. Da $u(\xi)$ als bekannt vorausgesetzt werden kann, ist dies keine Integralgleichung sondern eine Quadratur.

11.2. Wie in 3.1 betrachten wir zunächst die Liouville-Transformation

$$\text{(11.2.1)} \qquad \begin{cases} \xi(x) = \varrho \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}, \\ u(\xi) = \sqrt[4]{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}\, y(x). \end{cases}$$

Die Differentialgleichung (11.1.1) geht dann über in[3])

$$\text{(11.2.2)} \qquad \frac{u''}{u} = 1 - \frac{1-(2\delta)^2}{4} \wp(\xi; 2\varrho K, 2i\varrho K') + \frac{b-\varrho^2}{\varrho^2} = 1 + \frac{Q(\xi)}{\varrho^2}.$$

Das ξ-Polygon ist hier das Rechteck

$$-\varrho K \leq \Re(\xi) \leq 0, \qquad 0 \leq \Im(\xi) \leq \varrho K'.$$

Die geschlossenen Umläufe in der x-Ebene, die den Größen δ_{12} und δ_{23} zugeordnet sind, sind Periodenwege, die zu den Integralperioden $2i\varrho K'$ und $2\varrho K$ gehören. In der ξ-Ebene sind dies Wege, die von ξ_1 aus nach $\xi_1 + 2i\varrho K'$ bzw. nach $\xi_1 + 2\varrho K$ verlaufen. Als zweckmäßig für die Rechnung erweisen sich die Wege, die längs der Kanten der Periodenrechtecke von $-\varrho K + i\varrho K'$ nach $-\varrho K - i\varrho K'$ bzw. nach $\varrho K + i\varrho K'$ verlaufen. Auf diesen Geraden ist $\wp(\xi; 2\varrho K, 2i\varrho K')$ reell, so daß alle Rechnungen im Reellen durchgeführt werden können[4]).

11.3. Auf den betrachteten Wegen ist $Q(\xi)$ frei von Singularitäten. Wir können daher für die asymptotische Integration die Exponentialfunktionen $e^{\pm\xi}$ als Hilfsfunktionen wählen. Die mit $e^{\pm\xi}$ multiplizierten Lösungen $u_{1,2}(\xi)$ bezeichnen wir mit $U_{1,2}(\xi)$:

$$U_1(\xi) = e^{-\xi} u_1(\xi), \qquad U_2(\xi) = e^{\xi} u_2(\xi),$$

und es gilt nach (2.23) die Abschätzung

$$\text{(11.3.1)} \qquad |U_i(\xi) - 1| \leq e^{I(\xi)} - 1$$

mit

$$I(\xi) = \int_{\xi_1}^{\xi} k(\zeta)\, |d\zeta|,$$

wobei für $k(\zeta)$ die Abschätzung

$$k(\zeta) \leq \left| \frac{1 - e^{2(\xi-\zeta)}}{2\varrho^2} \right| |Q(\zeta)|$$

[3]) K, K' sind die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung in der Legendreschen Normalform zum Modul k in (11.1.2).

[4]) Genau genommen müßten wir die Ecken des Periodenrechtecks durch kleine Halbkreise umgehen, weil nur dann die Wege auch in der x-Ebene zulässig sind. Da die Differentialgleichung (11.2.2) aber auf diesen Ecken regulär ist, können wir diese Halbkreise zu Geraden deformieren.

bzw.

$$k(\zeta) \leq \frac{e^{2(\xi-\xi)}-1}{2\varrho^2} \, |Q(\zeta)|,$$

für alle ξ und ζ auf dem Integrationsweg und für hinreichend große ϱ gelten muß.

Zur Abschätzung der Ableitungen $u'_{1,2}(\xi)$ benutzen wir die Formel (11.1.4). Angewandt auf den vorliegenden Spezialfall schreibt sie sich nach leichter Umformung:

$$u'_1(\xi) = e^{\xi}\left(1 + \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{e^{2(\zeta-\xi)}+1}{2\varrho^2} \, Q(\zeta) \, U_1(\zeta) \, d\zeta\right), \tag{11.3.2}$$

$$u'_2(\xi) = -e^{-\xi}\left(1 - \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{e^{2(\xi-\zeta)}+1}{2\varrho^2} \, Q(\zeta) \, U_2(\zeta) \, d\zeta\right). \tag{11.3.3}$$

11.4. Mit Hilfe dieser Gleichungen schätzen wir zunächst δ_{12} ab. Als Integrationsweg haben wir nach 11.2 die Gerade von $-\varrho K + i\varrho K'$ nach $-\varrho K - i\varrho K'$ zu betrachten. Auf dieser Geraden ist $\xi - \zeta$ rein imaginär und wir können daher setzen

$$k(\zeta) = \frac{|Q(\zeta)|}{\varrho^2}. \tag{11.4.1}$$

Weiter wählen wir ϱ so, daß das Integral

$$\int_{-\varrho K + i\varrho K'}^{-\varrho K - i\varrho K'} |Q(\zeta)| \, |d\zeta|$$

möglichst klein wird. Dies ist dann der Fall, wenn $Q(\zeta)$ an den Stellen $-\varrho K \pm i\varrho \frac{K'}{2}$ verschwindet, d.h. es muß sein

$$\frac{b-\varrho^2}{\varrho^2} = \frac{1-(2\delta)^2}{4} \wp\left(-\varrho K \pm i\varrho \, \frac{K'}{2}; \, 2\varrho K, 2i\varrho K'\right), \tag{11.4.2}$$

woraus nach leichter Rechnung folgt[5])

$$\varrho^2 = b - \frac{1-(2\delta)^2}{4}\left(\frac{2-k^2}{3} - (1-k)\right). \tag{11.4.3}$$

Unter diesen Voraussetzungen wird

$$I(\xi) \leq I_0 = \int_{-\varrho K + i\varrho K'}^{-\varrho K - i\varrho K'} k(\zeta) \, |d\zeta| = \frac{2}{\varrho} \left| \frac{1-(2\delta)^2}{4} \right| (1-k). \tag{11.4.4}$$

Es ist also auf dem Integrationsweg

$$|U_{1,2}(\xi)| \leq e^{I_0}. \tag{11.4.5}$$

[5]) Falls (11.4.3) einen negativen Wert für ϱ^2 ergibt, transformiere man die Differentialgleichung durch die Substitution $x \to -x$. Es geht dann b in $-b$ und k^2 in k'^2 über, was zu positiven Werten von ϱ^2 führt.

Die Integrale in (11.3.2), (11.3.3) lassen sich abschätzen durch

$$\left| \int_{-\varrho K+i\varrho K'}^{-\varrho K-i\varrho K'} \frac{e^{\pm 2(\xi-\zeta)}+1}{2\varrho^2} Q(\zeta)\, U_{1,2}(\zeta)\, d\zeta \right| \leq I_0 e^{I_0}. \tag{11.4.6}$$

So können wir schließlich setzen:

$$\begin{cases} u_1(\xi_1) = e^{-\varrho K+i\varrho K'}, & u_1(\xi_2) = e^{-\varrho K-i\varrho K'}(1+E_1), \\ u_1'(\xi_1) = e^{-\varrho K+i\varrho K'}, & u_1'(\xi_2) = e^{-\varrho K-i\varrho K'}(1+E_1^*), \\ u_2(\xi_1) = e^{\varrho K-i\varrho K'}, & u_2(\xi_2) = e^{\varrho K+i\varrho K'}(1+E_2), \\ u_2'(\xi_1) = -e^{\varrho K-i\varrho K'}, & u_2'(\xi_2) = -e^{\varrho K+i\varrho K'}(1+E_2^*), \end{cases} \tag{11.4.7}$$

und es gelten die Abschätzungen

$$|E_{1,2}| \leq e^{I_0} - 1, \quad |E_{1,2}^*| \leq I_0 e^{I_0}. \tag{11.4.8}$$

Setzt man die Werte (11.4.8) in die Formel (11.1.3) ein, wobei $r=2$ zu setzen ist, so erhält man

$$\cos \pi \delta_{12} = \cos 2\varrho K' + \frac{E_1+E_1^*}{4} e^{-2i\varrho K'} + \frac{E_2+E_2^*}{4} e^{2i\varrho K'}. \tag{11.4.9}$$

Da $\cos \pi \delta_{12}$ jedenfalls reell sein muß, kann man statt dessen auch schreiben

$$\cos \pi \delta_{12} = \cos 2\varrho K' + \varepsilon \cos \gamma, \tag{11.4.10}$$

wo $\varepsilon = \left| \frac{E_1+E_1^*}{2} \right|$ und $\gamma = 2\varrho K' - \arg(E_1+E_1^*)$ ist.

11.5. Ganz analog verläuft die Abschätzung von δ_{23}. Als Integrationsweg haben wir die Gerade zwischen $-\varrho K+i\varrho K'$ und $+\varrho K+i\varrho K'$ zu betrachten. Auf diesem Weg ist $u_1(\xi)$ von links nach rechts, $u_2(\xi)$ von rechts nach links zu integrieren, damit die Größen $e^{2(\zeta-\xi)}$ bzw. $e^{2(\xi-\zeta)}$ beschränkt bleiben.

Wir können dann für $k(\zeta)$ setzen:

$$k(\zeta) = \frac{|Q(\zeta)|}{2\varrho^2}. \tag{11.5.1}$$

Dann wird

$$I(\xi) \leq I_0' = \frac{1}{\varrho} \left| \frac{1-(2\delta)^2}{4} \right| (1-k'), \tag{11.5.2}$$

wenn wir — auf Grund der gleichen Überlegungen wie in 11.4 — für ϱ^2 die folgende Größe wählen:

$$\varrho^2 = b + \frac{1-(2\delta)^2}{4}\left(\frac{2-k'^2}{3} - (1-k')\right), \tag{11.5.3}$$

$$\text{mit } k'^2 = 1-k^2.$$

Wenn wir also setzen:

$$\begin{cases} u_1(\xi_1) = e^{-\varrho K+i\varrho K'}, & u_1(\xi_2) = e^{\varrho K+i\varrho K'}(1+E_1), \\ u_1'(\xi_1) = e^{-\varrho K+i\varrho K'}, & u_1'(\xi_2) = e^{\varrho K+i\varrho K'}(1+E_1^*), \\ u_2(\xi_1) = e^{\varrho K-i\varrho K'}(1+E_2), & u_2(\xi_2) = e^{-\varrho K-i\varrho K'}, \\ u_2'(\xi_1) = -e^{\varrho K-i\varrho K'}(1+E_2^*), & u_2'(\xi_2) = -e^{-\varrho K-i\varrho K'}, \end{cases} \tag{11.5.4}$$

so gelten die Abschätzungen:

$$|E_{1,2}| \leq e^{I_0'} - 1, \qquad |E_{1,2}^*| \leq 2 I_0' e^{I_0'}. \tag{11.5.5}$$

Da die Differentialgleichung symmetrisch in $\xi - i\varrho K'$ ist, muß $u_1(\xi_2) = u_2(\xi_1)$ und $u_1'(\xi_2) = -u_2'(\xi_1)$ sein. Es ist daher

$$E_1 = E_2 \quad \text{und} \quad E_1^* = E_2^*.$$

Diese Größen sind zudem reell.

Die Wronskische Determinante erhält den Wert

$$W(u_1, u_2) = -(2 + E_1 + E_1^*). \tag{11.5.6}$$

So wird schließlich:

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \pi \delta_{23} &= \frac{e^{-2\varrho K} + (1 + E_1)(1 + E_1^*) e^{2\varrho K}}{2 - E_1 - E_1^*} \\ &= \mathfrak{Cof}\, 2\varrho K + \frac{(E_1 + E_1^*)\, \mathfrak{Sin}\, 2\varrho K + E_1 E_1^* e^{2\varrho K}}{2 + E_1 + E_1^*}. \end{aligned} \right. \tag{11.5.7}$$

11.6. Wie man aus (11.4.4) und (11.5.2) ersieht, hängt die Güte der Abschätzung nicht nur von ϱ sondern auch noch wesentlich von dem Modul k bzw. k' ab. Ist k oder k' klein, so läßt sich die Abschätzung der zugehörigen Größe δ_{12} bzw. δ_{23} wesentlich verbessern, wenn man statt der Exponentialfunktion die hypergeometrischen Funktionen als Hilfsfunktionen heranzieht.

Als Hilfsdifferentialgleichung benutzen wir die in § 5 diskutierte Differentialgleichung (5.1.3). Wir setzen dort $\delta_0 = \frac{1}{2}$, $\delta_1 = \delta$ und $\delta_\infty = \frac{2i\varrho K}{\pi}$ bzw. $\delta_\infty = \frac{2\varrho K'}{\pi}$. Wir betrachten also die folgenden Hilfsdifferentialgleichungen:

$$\frac{v''}{v} = 1 - \frac{1 - (2\delta)^2}{4} \cdot \frac{\pi^2}{4\varrho^2 K^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\xi \pi}{2\varrho K}}, \tag{11.6.1}$$

$$\frac{v''}{v} = 1 - \frac{1 - (2\delta)^2}{4} \cdot \frac{\pi^2}{4\varrho^2 K'^2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 \frac{\xi \pi}{2\varrho K'}}. \tag{11.6.2}$$

(11.6.1) dient zur Abschätzung von δ_{12}, (11.6.2) zur Abschätzung von δ_{23}.

11.7. Wir beginnen mit der Abschätzung von δ_{12}. Wie in (2.15) sei $q(\xi)$ definiert durch

$$\frac{u''}{u} = \frac{v''}{v} + \frac{q(\xi)}{\varrho^2}.$$

Das Integral

$$\int_{-\varrho K + i\varrho K'}^{-\varrho K - i\varrho K'} |q(\zeta)|\, |d\zeta|$$

erhält sein Minimum für

$$\varrho^2 = b - \frac{1 - (2\delta)^2}{4} \left(\frac{2 - k^2}{3} - (1 - k) - \frac{\pi^2}{4K^2} \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 \frac{\pi}{4} \frac{K'}{K}} \right). \tag{11.7.1}$$

Als Hilfsfunktionen für die asymptotische Integration benutzen wir die in (5.3.1) definierten $v_1^{(1)}(\xi), v_1^{(2)}(\xi)$. Für $\xi \to -\varrho K + i\infty$ gilt

$$v_1^{(1)} = e^{\xi+\varrho K} + O\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad v_1^{(2)} = e^{-(\xi+\varrho K)} + O\left(\frac{1}{\xi}\right), \tag{11.7.2}$$

und für $\xi \to -\varrho K - i\infty$ wegen (5.3.2)

$$\begin{cases} v_1^{(1)}(\xi) = 4^{\frac{2i\varrho K}{\pi}} 2\pi H_0\left(-\frac{2i\varrho K}{\pi}, \frac{1}{2}, \delta\right) e^{\xi+\varrho K} + \\ \qquad + \frac{\cos\pi\delta}{\sin 2i\varrho K} e^{-(\xi+\varrho K)} + O\left(\frac{1}{\xi}\right), \\ v_1^{(2)}(\xi) = -\frac{\cos\pi\delta}{\sin 2i\varrho K} e^{\xi+\varrho K} + \\ \qquad + 4^{-\frac{2i\varrho K}{\pi}} 2\pi H_0\left(\frac{2i\varrho K}{\pi}, \frac{1}{2}, \delta\right) e^{-(\xi+\varrho K)} + O\left(\frac{1}{\xi}\right). \end{cases} \tag{11.7.3}$$

Da die Voraussetzungen von 2.8 und 2.10 für die asymptotische Integration von $-\varrho K + i\varrho K'$ nach $-\varrho K - i\varrho K'$ auf dem betrachteten Integrationsweg erfüllt sind, gibt es zwei linear unabhängige Lösungen von (11.2.2), für die nach (2.45) gilt:

$$\begin{cases} u_1(\xi) = v_1^{(1)}(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \\ u_2(\xi) = v_1^{(2)}(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \end{cases} \tag{11.7.4}$$

Wegen (11.1.4) gilt dann auch auf dem Integrationsweg:

$$\begin{cases} u_1'(\xi) = v_1^{(1)\prime}(\xi) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \\ u_2'(\xi) = v_1^{(2)\prime}(\xi) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \end{cases} \tag{11.7.5}$$

Die asymptotischen Abschätzungen (11.7.2), (11.7.3) und die durch Differentiation daraus entstehenden für die $v_1^{(i)\prime}$ geben in Verbindung mit (11.7.4), (11.7.5) Abschätzungen für $u_{1,2}^{(\prime)}$ an den Stellen

$$\xi_1 = -\varrho K - i\varrho K', \quad \xi_2 = -\varrho K + i\varrho K'.$$

Eingesetzt in Formel (11.1.3) ergibt das

$$\begin{cases} \cos\pi\delta_{12} = 4^{-\frac{2i\varrho K}{\pi}} 2\pi H_0\left(\frac{2i\varrho K}{\pi}, \frac{1}{2}, \delta\right) e^{2i\varrho K'} + \\ \qquad + 4^{\frac{2i\varrho K}{\pi}} 2\pi H_0\left(-\frac{2i\varrho K}{\pi}, \frac{1}{2}, \delta\right) e^{-2i\varrho K'} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \end{cases} \tag{11.7.6}$$

oder anders geschrieben

$$\cos\pi\delta_{12} = C\cos(2\varrho K' + \gamma) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right); \tag{11.7.7}$$

dabei ist

$$C^2 = \left| 2\pi H_0\left(\frac{2i\varrho K}{\pi},\ \frac{1}{2},\ \delta\right)\right|^2 = \frac{\mathfrak{Cof}^2 2\varrho K - \sin^2\pi\delta}{\mathfrak{Sin}^2 2\varrho K},$$

$$\gamma = \arg H_0\left(\frac{2i\varrho K}{\pi},\ \frac{1}{2},\ \delta\right) - \frac{2\varrho K}{\pi}\log 4.$$

11.8. Ganz entsprechend kann auch die Größe δ_{23} abgeschätzt werden. Wir benutzen jetzt die Hilfsdifferentialgleichung (11.6.2) und erhalten zunächst als günstigsten Wert für ϱ^2:

$$\varrho^2 = b + \frac{1-(2\delta)^2}{4}\left(\frac{2-k'^2}{3} - (1-k') - \frac{\pi^2}{4K'^2}\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\frac{\pi}{4}\frac{K}{K'}}\right). \tag{11.8.1}$$

Als Hilfsfunktionen benutzen wir die in 5.2 definierten $v_1^{(2)}$, $\tilde{v}_1^{(1)}$. Für $\xi\to\infty$ zeigen diese Funktionen ein asymptotisches Verhalten, das durch die Formeln (5.2.1), (5.2.4) und (5.2.9) gekennzeichnet ist. Entsprechendes Verhalten zeigen auch die Ableitungen; hieraus folgt, daß die beiden Funktionen linear unabhängig sind. Durch asymptotische Integration — wobei u_1 wieder von links nach rechts, u_2 in der umgekehrten Richtung zu integrieren ist — läßt sich dann auch der Wert von $u_{1,2}^{(\prime)}$ an den Stellen $\mp\varrho K + i\varrho K'$ abschätzen.

Eingesetzt in (11.1.3) ergibt das

$$\cos\pi\delta_{23} = \mathfrak{Cof}(2\varrho K + \gamma')\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \tag{11.8.2}$$

mit

$$\gamma' = \log 2\pi H_0\left(\frac{2\varrho K'}{\pi},\ \delta,\ \frac{1}{2}\right) - \frac{2\varrho K'}{\pi}\log 4.$$

11.9. Eine Fehlerabschätzung zu den Formeln (11.7.7) und (11.8.2) läßt sich im Prinzip genau wie bei der Verwendung der Exponentialfunktion als Hilfsfunktion durchführen. Insbesondere ist $q(\zeta)$ explizit bekannt; so wird im Fall 11.7 das Integral

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\varrho^2}\int_{-\varrho K+i\varrho K'}^{-\varrho K-i\varrho K'} |q(\zeta)|\,|d\zeta| = \\ &= \frac{2}{\varrho}\left|\frac{1-(2\delta)^2}{4}\right|\left|1-k-\frac{\pi}{K}\mathfrak{Tg}\frac{\pi}{4}\frac{K'}{K}+\frac{\pi}{2K}\mathfrak{Tg}\frac{\pi}{2}\frac{K'}{K}\right|. \end{aligned}\right. \tag{11.9.1}$$

Diese Größe geht sehr rasch gegen Null für $k\to 0$; schon für $k = 1/\sqrt{2}$ ist sie um etwa eine Zehnerpotenz kleiner als die entsprechende (11.4.4). Zu den gleichen Ergebnissen führt der Fall 11.8.

Neben dieser Größe ist aber noch der von den Hilfsfunktionen herrührende Anteil (2.24)

$$\left|\frac{v_1(\zeta)v_2(\xi) - v_2(\zeta)v_1(\xi)}{W(v_1, v_2)}\right|$$

abzuschätzen, und hierin liegt die wesentliche Schwierigkeit, da diese Werte nicht explizit bekannt sind[6]). Indessen darf man vermuten, daß — wie bei

[6]) Die Hilfsfunktionen lassen sich allerdings ihrerseits wieder — mit der Exponentialfunktion als Hilfsfunktion — abschätzen. [Vgl. (11.9.2)]. Doch gibt das viel zu grobe Fehlerschranken, durch die die Vorteile der verfeinerten Abschätzung illusorisch werden.

der Exponentialfunktion — diese Größe den Wert 1 nicht allzusehr überschreitet.

Schließlich ist noch die Abweichung der Hilfsfunktionen von der Exponentialfunktion zu berücksichtigen. Im Fall 11.7 lassen sich hierfür sehr brauchbare Abschätzungen durch asymptotische Integration gewinnen. Man findet so auf der Geraden $\xi = -\varrho K + it$ (t reell)

$$v_1^{(1)(2)} = e^{\pm it}(1 + E_{1,2}), \tag{11.9.2}$$

mit

$$|E_{1,2}| \leqq e^I - 1$$

und

$$I = \frac{1 - (2\delta)^2}{4} \frac{\pi}{2\varrho K}\left(1 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{t}{K}\right).$$

Für $t = K'$ und kleine k hat diese Abweichung etwa die Größenordnung von (11.9.1). Entsprechendes gilt für die Ableitungen.

Im Fall 11.8 lassen sich solche Abschätzungen nicht gewinnen. Hier müssen die wahren Werte der Hilfsfunktionen — etwa aus den Potenzreihen — berechnet werden.

Im übrigen zeigen die Abschätzungen, daß die Formel (11.7.7) nicht nur asymptotische Werte für $\varrho \to \infty$, sondern auch für $k \to 0$ und $\delta \to \frac{1}{2}$ liefert[7]). Durch etwas modifizierte Abschätzungen[8]) läßt sich zeigen, daß dies gleichmäßig gilt für alle reellen $\varrho^2 \geqq -1 + \varepsilon$ mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ also insbesondere auch für $\varrho = 0$. Hierfür gilt, wie man durch Grenzübergang aus (11.7.7) berechnet:

$$\left\{\begin{aligned} \cos \pi \delta_{12} = \frac{\cos \pi \delta}{\pi}\Big(\pi \frac{K'}{K} - \log 4 - 2C - \\ - \psi\Big(\frac{1+\delta+\frac{1}{2}}{2}\Big) - \psi\Big(\frac{1+\delta-\frac{1}{2}}{2}\Big) - \psi\Big(\frac{1-\delta+\frac{1}{2}}{2}\Big) - \\ - \psi\Big(\frac{1-\delta-\frac{1}{2}}{2}\Big)\Big) + O\Big(k\Big(\delta - \frac{1}{2}\Big)\Big). \end{aligned}\right. \tag{11.9.3}$$

(C Eulersche Konstante, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.)

§ 12. Die Lamésche Differentialgleichung bei großen Werten δ

12.1. In den Abschätzungen des § 11 haben wir die Voraussetzung $\delta^2 \leqq \frac{1}{4}$, die wir in 3.1 wegen 2.11 (Fußnote 15) machen mußten, nicht benutzt. Man sieht jedoch, etwa aus (11.4.5) und den analogen Rechnungen für die anderen Fälle, daß die Abschätzungen sehr bald schlecht werden, wenn δ wesentlich von dem Wert $\frac{1}{2}$ abweicht. Wenn δ groß ist benutzen wir daher zweckmäßig

[7]) Übrigens liefert auch Formel (11.5.7) asymptotische Werte für $k \to 0$, (11.4.10) für $k \to 1$ und beide für $\delta \to \frac{1}{2}$.

[8]) Es müssen hierzu die Größen $1 - e^{\pm(\zeta - \xi)}$ stärker berücksichtigt und auch geeignetere Linearkombinationen der $v_1^{(i)}$ als Hilfsfunktionen herangezogen werden.

eine andere Form der Liouville-Transformation; wir setzen

$$\varrho^2 \wp(x) = \frac{b^* + \delta^2 x}{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}. \tag{12.1.1}$$

Für b^* ist dabei jeder beliebige reelle Wert zugelassen; der Einfachheit halber werden wir — sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird — $b^* = b$ wählen.

$\xi(x)$ wird das elliptische Integral dritter Gattung

$$\xi(x) = \frac{\delta}{2} \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{x-c}{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}\, dx, \quad c = -\frac{b^*}{\delta^2}. \tag{12.1.2}$$

Die transformierte Differentialgleichung — wir können sie jetzt nicht mehr in expliziter Form angeben — hat im ξ-Polygon eine singuläre Stelle

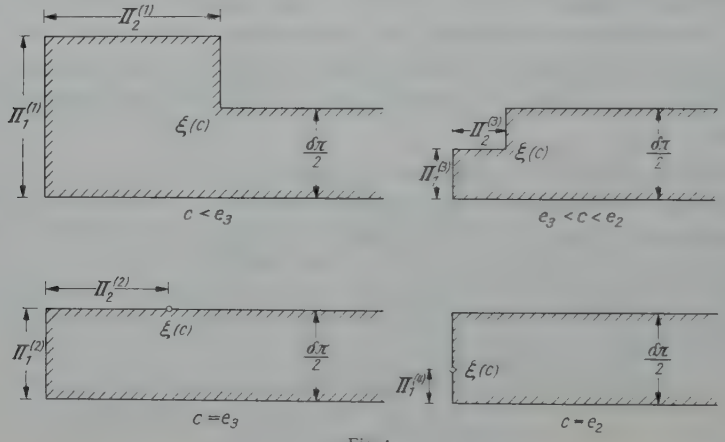

Fig. 1

bei $\xi(c)$. Diese hat im allgemeinen den Index $\frac{1}{3}$; nur wenn c mit einer der Stellen e_ν zusammenfällt, $c = e_1, e_2, e_3$ hat sie den Index $\frac{1}{4}$. Von dieser Ausnahme abgesehen sind die Stellen $\xi(e_\nu)$ reguläre Stellen der transformierten Differentialgleichung.

Es sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. $c < e_3$. 2. $c = e_3$. 3. $e_3 < c < e_2$. 4. $c = e_2$. 5. $e_2 < c < e_1$. 6. $c = e_1$. 7. $e_1 < c$.

Die zugehörigen ξ-Polygone zeigt Fig. 1. Wir können uns auf die Behandlung der Fälle 1. bis 4. beschränken. Die Transformation $x \to -x$ im Integral (12.1.2) führt die Fälle 4. bis 7. auf die Fälle 1. bis 4. zurück. Bei dieser Transformation bleibt (12.1.2) formal ungeändert, wenn man dort statt c die Größe $-c$ und statt des Tripels e_1, e_2, e_3 das Tripel $-e_3, -e_2, -e_1$ d.h. in (11.1.2) statt k^2 die Größe $k'^2 = 1 - k^2$ setzt. Im übrigen beschränken wir uns auf die Untersuchung bei reellem δ; bei der Behandlung imaginärer δ treten keine neuen Gesichtspunkte auf.

Zur Abschätzung der Lösungen mit Hilfe der asymptotischen Integration könnten wir wie bisher die in Fig. 1 gezeigten ξ-Polygone in Rechtecke und Halbstreifen einteilen und in diesen Teilbereichen mit den Zylinderfunktionen (4.4.3) abschätzen. Wir könnten dann aber nicht (vgl. etwa 6.3 und 6.5) stetig von einem Fall zum anderen übergehen. Dies wird möglich, wenn wir als Hilfsfunktionen die Lösungen der in § 6 und § 9 untersuchten Differentialgleichungen zugrunde legen.

Hierzu bemerken wir, daß die in Fig. 1 gezeigten ξ-Polygonen sich einbetten lassen in gewisse der in § 6 und § 9 behandelten ξ-Polygone. Daher lassen sich die Lösungen der transformierten Laméschen Differentialgleichung im ganzen ξ-Polygon abschätzen durch gewisse Lösungen der transformierten Riemannschen oder Whittakerschen Differentialgleichung. Ebenso sind die zugehörigen Kreisbogenvierecke Teilbereiche von gewissen Kreisbogendreiecken; sie können aufgefaßt werden als Kreisbogendreiecke mit „abgeschnittenen Ecken". Wir werden dies weiter unten im einzelnen untersuchen.

12.2. Für die Abschätzung der geometrischen Invarianten des Kreisbogenvierecks mit Hilfe der asymptotischen Integration sind maßgebend die in Fig. 1 als Π_1 und Π_2 bezeichneten Größen. Es sind dies vollständige elliptische Integrale dritter Gattung und sie können daher durch unvollständige elliptische Integrale erster und zweiter Gattung in der Legendreschen Normalform dargestellt werden. Wir geben die Ausdrücke für die Fälle 1. bis 4. explizit an; die Ausdrücke für die Fälle 5. bis 7. erhält man daraus, wie oben erwähnt, durch die Transformation $x \to -x$, $c \to -c$, $k \to k'$.

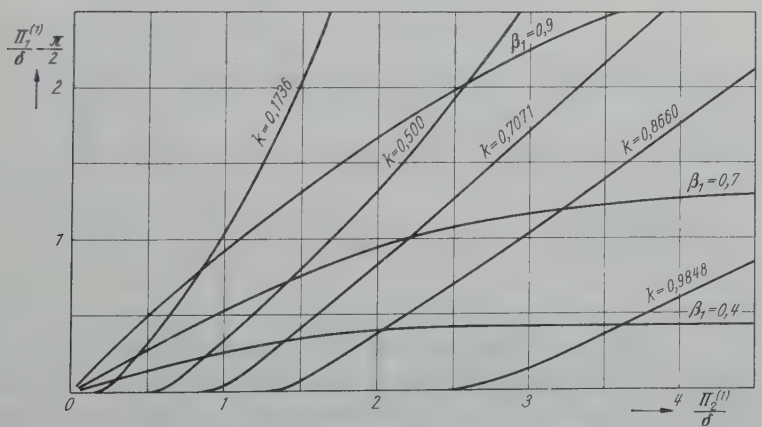

Fig. 2

1. $c < e_3$.

$$(12.2.1)\quad \Pi_1^{(1)} = \delta\left[\frac{K(k_1')}{\sqrt{e_2 - c}}(e_3 - c) + \left(E(k_1') - K(k_1')\right)F(k_1, \varphi) + K(k_1')\,E(k_1, \varphi)\right].$$

$$(12.2.2)\quad \Pi_2^{(1)} = \delta\left[\frac{K(k_1)}{\sqrt{e_2 - c}}(e_3 - c) + K(k_1)\,E(k_1, \varphi) - E(k_1)\,F(k_1, \varphi)\right].$$

Dabei ist

$$k_1^2 = k^2 \frac{e_1 - c}{e_2 - c}, \quad k_1'^2 = 1 - k_1^2 = k'^2 \frac{e_3 - c}{e_2 - c}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{e_1 - c}.$$

(Siehe Fig. 2; $\beta_1 = \frac{e_3 - c}{e_2 - c}$.) Die Größen $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ sind die unvollständigen $K(k)$ und $E(k)$ die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in der Legendreschen Normalform.

2. $c = e_3$.

Das elliptische Integral artet hier in ein trigonometrisches aus. Es wird

(12.2.3) $$\Pi_1^{(2)} = \frac{\delta \pi}{2},$$

(12.2.4) $$\Pi_2^{(2)} = \log \frac{1 + k}{1 - k}.$$

3. $e_3 < c < e_2$ (Fig. 3).

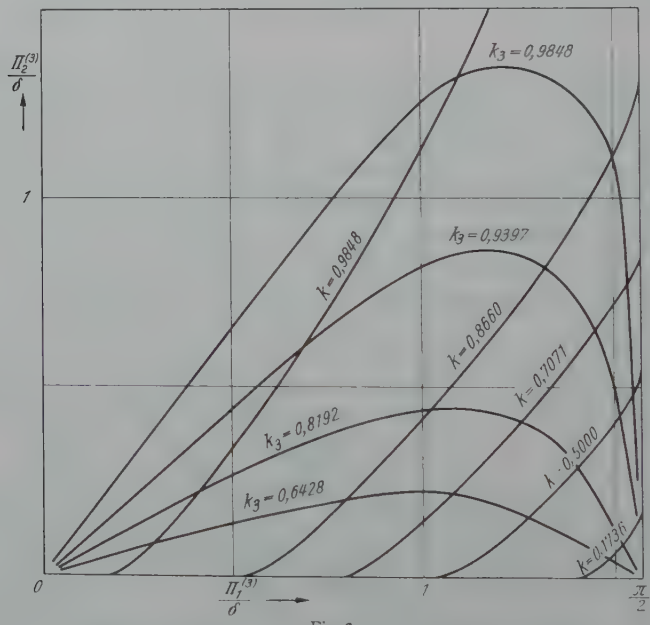

Fig. 3

(12.2.5) $$\Pi_1^{(3)} = \delta \left[\left(E(k_3') - K(k_3') \right) F(k_3, \varphi) + K(k_3') E(k_3, \varphi) \right].$$

(12.2.6) $$\Pi_2^{(3)} = \delta \left[\left(K(k_3) E(k_3, \varphi) - E(k_3) F(k_3, \varphi) \right) \right].$$

$$k_3^2 = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{e_2 - c}{e_1 - c}; \quad k_3'^2 = 1 - k_3^2 = \frac{k'^2}{k^2} \cdot \frac{c - e_3}{e_1 - c}, \quad \sin^2 \varphi = e_1 - c.$$

4. $c = e_2$.

Wie im Fall 2. artet das Integral aus. Es wird

(12.2.7) $$\Pi_1^{(4)} = \delta \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin k \right],$$

(12.2.8) $$\Pi_2^{(4)} = 0.$$

12.3. Zur Konstruktion der Kreisbogenvierecke aus den ξ-Polygonen gehen wir, wie gesagt, davon aus, daß die in Fig. 1 dargestellten ξ-Polygone als Teilstücke aufgefaßt werden können von gewissen ξ-Polygonen aus § 6 und § 9. Bilden wir diese Teilstücke durch den Quotienten zweier linear unabhängiger Lösungen der Riemannschen oder Whittakerschen Differentialgleichung ab, so erhalten wir ein — eventuell ausgeartetes — Kreisbogendreieck, von dem die eine Ecke abgeschnitten ist. Liegen die Schnittlinien in der ξ-Ebene hinreichend weit von den Singularitäten der Differentialgleichung entfernt[9]), so können die Lösungen dort durch die Exponentialfunktion $e^{\pm\xi}$ angenähert werden und der Quotient bildet die Schnittlinien näherungsweise auf ein Kreisbogenstück ab. Es werden dann tatsächlich die in Fig. 1 dargestellten ξ-Polygone durch den Quotienten der Hilfsfunktionen näherungsweise auf Bereiche abgebildet, die die Gestalt der gesuchten Kreisbogenvierecke haben.

Wie die Abbildung durch den Quotienten der Hilfsfunktionen im einzelnen aussieht, ist aus den in § 6 und § 9 angegebenen Fortsetzungsrelationen ohne weiteres zu entnehmen. Wir zeigen dies genauer in Fig. 4 bis 9.

Die Bedingung, daß die Singularitäten hinreichend weit von den Schnittlinien entfernt liegen müssen, ist entscheidend für die Wahl der Hilfsfunktionen. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

1a. $\Pi_1^{(1)} - \frac{\delta\pi}{2}$ *groß*, $\Pi_2^{(1)}$ *beliebig*, Hilfsfunktionen aus 6.8.

1b. $\Pi_1^{(1)}$ *beliebig*, $\Pi_2^{(1)}$ *groß*, Hilfsfunktionen aus 6.4.

2. $\Pi_1^{(2)} = \frac{\delta\pi}{2}$, $\Pi_2^{(2)}$ *groß*, Hilfsfunktionen aus 6.5.

3a. $\Pi_1^{(3)}$ *beliebig*, $\Pi_2^{(3)}$ *groß*, Hilfsfunktionen aus 6.4.

3b. $\Pi_1^{(3)}$ *groß*, $\frac{\delta\pi}{2} - \Pi_1^{(3)}$ *groß*, $\Pi_2^{(3)}$ *beliebig*, Hilfsfunktionen aus 9.2.

12.4. $\Pi_1^{(1)} - \frac{\delta\pi}{2}$ **groß,** $\Pi_2^{(1)}$ **beliebig.** Wir wählen die Hilfsfunktionen aus 6.8 und müssen dann setzen:

$$\delta_0 = \frac{1}{2}, \qquad \delta_1 = \frac{2i\Pi_2^{(1)}}{\pi}, \qquad \delta_\infty = \delta.$$

Speziell betrachten wir die in 6.8 definierten Funktionen $v_2^{(1)}(\xi)$ und $v_2^{(2)}(\xi)$. Wenn wir die Anfangspunkte für die asymptotische Integration bei $v_2^{(1)}(\xi)$ auf dem linken, bei $v_2^{(2)}(\xi)$ auf dem rechten Rand des in Fig. 4 dargestellten ξ-Polygons wählen[10]), so können wir alle Punkte im Inneren des ξ-Polygons auf solchen Wegen erreichen, auf denen die Bedingung (2.26) erfüllt werden

[9]) Diese Schnittlinien sind die in 3.8 erwähnten Nahtstellen.

[10]) Um den direkten Anschluß an die Untersuchungen in 6.8 zu gewinnen, betrachten wir in Fig. 4 ein ξ-Polygon, das spiegelbildlich liegt zu dem in Fig. 1 dargestellten. Bei diesem müßten wir zur Abschätzung die Hilfsfunktionen $\tilde{v}_\nu^{(i)}$ heranziehen. (Vgl. die Festsetzungen von 4.5.) Die Formeln zur Abschätzung der geometrischen Invarianten bleiben ungeändert. Entsprechendes gilt auch für die folgenden Abschnitte 12.5 bis 12.9.

kann. Es gilt also im ganzen ξ-Polygon die Abschätzung

$$(12.4.1) \qquad u_1(\xi) = v_2^{(1)}(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \qquad u_2(\xi) = v_2^{(2)}(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right),$$

für zwei, bei hinreichend großem ϱ linear unabhängige Lösungen $u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$ der transformierten Laméschen Differentialgleichung.

Wir betrachten jetzt die konforme Abbildung durch den Quotienten $\eta(\xi) = \frac{v_2^{(1)}(\xi)}{v_2^{(2)}(\xi)}$. Das vollständige ξ-Polygon von 6.8 Fig. 9 wird durch $\eta(\xi)$ auf ein Kreisbogendreieck abgebildet. Nennen wir die zu $x = 0, 1, \infty$ gehörenden

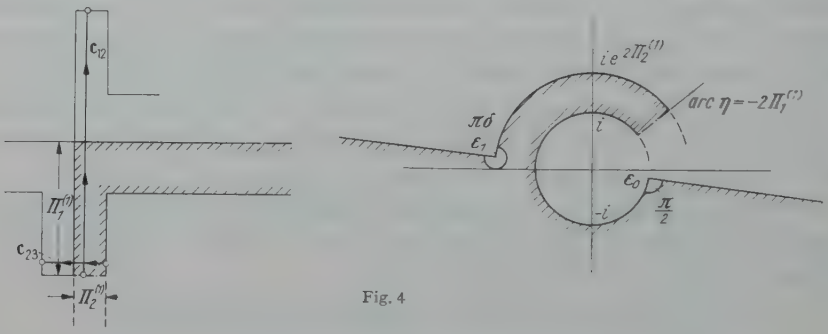

Fig. 4

Ecken ε_0, ε_1, ε_∞ so wird bei dieser speziellen Abbildung

$$(12.4.2) \qquad \varepsilon_0 = \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\Pi_2^{(1)}}{\mathfrak{Sin}\, 2\Pi_2^{(1)} - i\cos\pi\delta} H_1\left(\frac{2i\Pi_2^{(1)}}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right),$$

$$(12.4.3) \qquad \varepsilon_\infty = \frac{e^{4\Pi_2^{(1)}} - 1}{2i\cos(\pi\delta - 2i\Pi_2^{(1)})} H_1\left(\frac{2i\Pi_2^{(1)}}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right).$$

Dabei liegt ε_0 auf dem Einheitskreis, ε_∞ auf dem Kreis $|\eta| = e^{2\Pi_2^{(1)}}$; diese beiden Kreise bilden, unendlich oft durchlaufen, die zu $x = 1$ gehörige Ecke. Die dritte Seite des Kreisbogendreiecks ist ein die Punkte ε_0 und ε_∞ verbindender Kreis, der bei ε_0 den Winkel $\pi/2$ und bei ε_∞ den Winkel $\delta\pi$ bildet[11]).

In der Umgebung der Schnittlinie verhält sich $\eta(\xi)$ wie $e^{2\xi}$. Die Schnittlinie wird daher durch $\eta(\xi)$ näherungsweise auf den Strahl $\arg\eta = -2\Pi_1^{(1)}$ abgebildet. Damit haben wir die Gestalt des gesuchten Kreisbogenvierecks näherungsweise bestimmt (s. Fig. 4).

Wir berechnen noch die Winkelgrößen δ_{12} und δ_{23}. Hierzu benutzen wir die in Fig. 4 gezeigten Integrationswege; diese sind in der x-Ebene geschlossene Wege mit den geforderten Eigenschaften.

Wir betrachten zunächst den Weg $\mathfrak{C}_{23}$. Auf diesem Weg verhalten sich die Hilfsfunktionen näherungsweise wie die Exponentialfunktion, und wir können direkt mit der Exponentialfunktion abschätzen. Dies geschieht — ab-

[11]) Die genaue Konstruktion, insbesondere die Überdeckungsverhältnisse bei nichtschlichten Kreisbogendreiecken ist aus Fig. 9 in 6.8 zu ersehen.

gesehen von der Fehlerabschätzung — genau wie in 11.5. Wir erhalten so die Abschätzung:

(12.4.4.) $$\cos \pi \delta_{23} = \mathfrak{Cof}\, 2\Pi_2^{(1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right).$$

Auf dem Weg $\mathfrak{C}_{12}$ benutzen wir wieder $v_2^{(1)}(\xi)$ und $v_2^{(2)}(\xi)$ als Hilfsfunktionen. Am Anfangspunkt ξ_1 verhalten sich diese Funktionen wie $e^{\pm\xi}$, das Verhalten am Endpunkt ξ_2 ergibt sich aus der Fortsetzungsrelation (6.8.5). Auf Grund dieser Beziehungen schätzt man ähnlich wie in 11.7 ab:

(12.4.5) $$\cos \pi \delta_{12} = C_1 \cos(2\Pi_1^{(1)} + \gamma_1) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

mit

$$C_1^2 = \left|H_1\left(\frac{2i\Pi_2^{(1)}}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right)\right|^2 = \frac{\mathfrak{Cof}^2\, 2\Pi_2^{(1)} - \sin^2 \pi\delta}{\mathfrak{Sin}^2\, 2\Pi_2^{(1)}},$$

$$\gamma_1 = \arg H_1\left(\frac{2i\Pi_2^{(1)}}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right).$$

12.5. $\Pi_1^{(1)}$ **beliebig,** $\Pi_2^{(1)}$ **groß.** Dies führt auf den Fall 6.4, und wir müssen setzen:

$$\delta_0 = \frac{1}{2}, \qquad \delta_1 = \delta, \qquad \delta_\infty = \frac{2\Pi_1^{(1)}}{\pi}.$$

Als spezielle Hilfsfunktionen wählen wir die dort definierten $v_4^{(1)}$ und $v_3^{(2)}$; es gibt dann wieder ein Paar von Lösungen der transformierten Laméschen

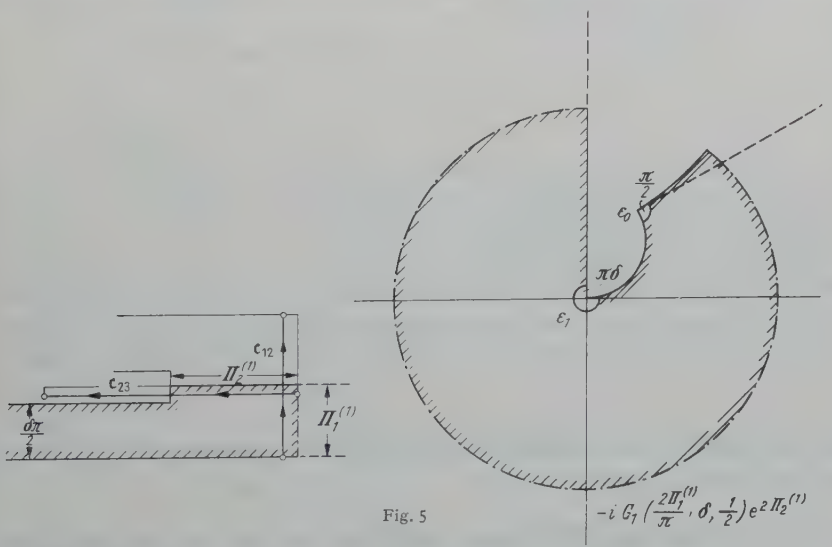

Fig. 5

Differentialgleichung, die im ganzen ξ-Polygon diesen Hilfsfunktionen asymptotisch gleich sind.

Die konforme Abbildung des ξ-Polygons durch $\eta = \frac{v_4^{(1)}}{v_3^{(2)}}$ läßt sich aus den in 6.4 angeführten Übergangssubstitutionen und asymptotischen Abschätzungen wie im vorhergehenden Fall bestimmen (s. Fig. 5). Die auf diese Weise

entstehende Figur stimmt mit dem gesuchten Kreisbogenviereck bis auf die durch die asymptotische Integration entstehenden Fehler überein. Die geometrische Gestalt des Kreisbogenvierecks läßt sich so näherungsweise bestimmen.

Die Größen δ_{12} und δ_{23} schätzen wir durch asymptotische Integration auf den in Fig. 5 gezeigten Wegen $\mathfrak{C}_{12}$ und $\mathfrak{C}_{23}$ ab. Wir erhalten so:

$$\cos \pi \delta_{12} = \cos 2\Pi_1^{(1)} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{12.5.1}$$

$$\begin{cases} \cos \pi \delta_{23} = \mathfrak{Cof}\,(2\Pi_2^{(1)} + \gamma_2)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \\ \gamma_2 = \log H_1\left(\frac{2\Pi_1^{(1)}}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right). \end{cases} \tag{12.5.2}$$

12.6. $\Pi_1^{(2)} = \frac{\delta\pi}{2}$, $\Pi_2^{(2)}$ groß. Dieser Fall läßt sich in dem gleichen Sinne als Grenzfall von 12.5 auffassen, wie 6.5 ein Grenzfall von 6.4 war. Die Überlegungen und Formeln von 12.5 bleiben daher unverändert erhalten, wenn

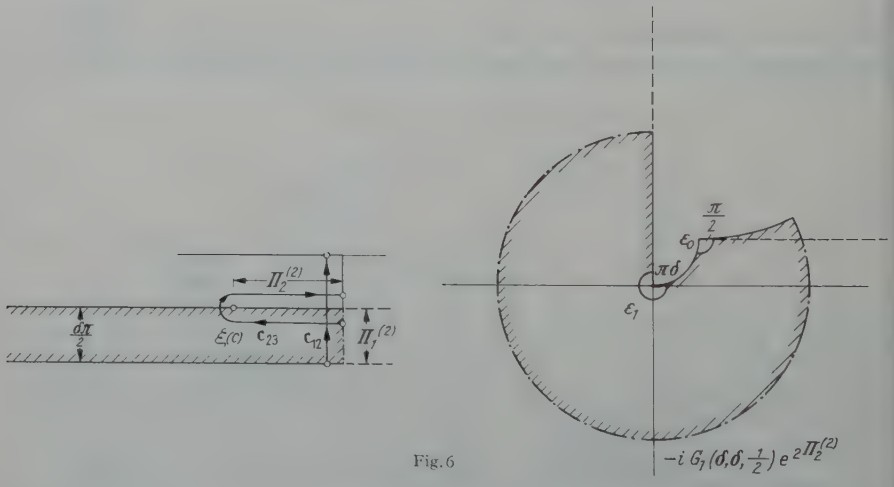

Fig. 6

man die entsprechenden Hilfsfunktionen aus 6.5 und die in Fig. 6 gezeigten Integrationswege benutzt.

12.7. $\Pi_1^{(3)}$ beliebig, $\Pi_2^{(3)}$ groß. Auch hier werden wir auf den Fall 6.4 geführt, haben aber jetzt zu setzen

$$\delta_0 = \frac{1}{2}, \qquad \delta_1 = \frac{2\Pi_1^{(3)}}{\pi}, \qquad \delta_\infty = \delta.$$

Wir können wieder dieselben Hilfsfunktionen wie in 12.5 wählen. Fig. 7 zeigt die konforme Abbildung des ξ-Polygons durch den Quotienten dieser

Hilfsfunktionen. Die asymptotische Abschätzung der Größen δ_{12} und δ_{23} ergibt:

$$\cos \pi \delta_{12} = \cos 2\Pi_1^{(3)} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{12.7.1}$$

$$\cos \pi \delta_{23} = \mathfrak{Cof}\,(2\Pi_2^{(3)} + \gamma_3)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \tag{12.7.2}$$

mit

$$\gamma_3 = \log 2 \cos (\pi \delta - 2\Pi_1^{(3)}) + \log H_1'\left(\frac{2\Pi_1^{(3)}}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right).$$

Die Formel versagt, wenn $\delta - \frac{2\Pi_1^{(3)}}{\pi} = n + \frac{1}{2}$, n ganz ist. In diesem Fall ist die asymptotische Integration mit den gewählten Hilfsfunktionen auf dem

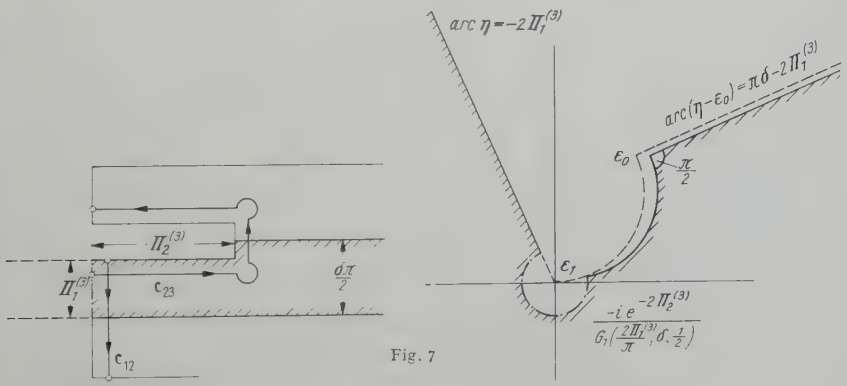

Fig. 7

Weg $\mathfrak{C}_{23}$ nicht möglich, weil die Bedingung (2.26) dort nicht erfüllt werden kann. Geometrisch ist dies Versagen so zu erklären, daß in diesem Fall geringe Änderungen des nach unserem Näherungsverfahren konstruierten Kreisbogenvierecks eine große Änderung von δ_{23} nach sich zieht, eine Änderung insbesondere, die durch die Fehlerschranken von (12.7.2) nicht mehr erfaßt werden kann. Das Konstruktionsverfahren bleibt aber weiterhin anwendbar. Im übrigen können wir in diesem Fall δ_{23} mit den Hilfsfunktionen des folgenden Abschnittes abschätzen.

12.8. $\Pi_1^{(3)}$ groß, $\frac{\delta\pi}{2} - \Pi_1^{(3)}$ groß, $\Pi_2^{(3)}$ beliebig. Dies entspricht dem Fall 9.2 und wir müssen setzen

$$\varkappa = \frac{\Pi_2^{(3)}}{\pi}, \qquad m = \frac{1}{4}.$$

Als Hilfsfunktionen wählen wir $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$. Zum Fall 9.2 gehört ein ausgeartetes Kreisbogendreieck, das aus zwei unendlich oft durchlaufenen Kreisen und einem logarithmischen Windungspunkt $\left(\text{bei } \eta = \frac{v_1^{(1)}}{v_1^{(2)}} = \infty\right)$ gebildet wird. Durch zwei Strahlen, die jeweils einen Kreis mit dem logarithmischen

Windungspunkt verbinden, wird hieraus das gesuchte Kreisbogenviereck ausgeschnitten (vgl. Fig. 8).

Für δ_{12} und δ_{23} ergeben sich die folgenden Abschätzungen:

$$\cos \pi \delta_{12} = \sqrt{1 + e^{-4\Pi_2^{(3)}}} \left(\cos (2\Pi_1^{(3)} + \gamma_4) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) \right), \tag{12.8.1}$$

$$\cos \pi \delta_{23} = \sqrt{1 + e^{4\Pi_2^{(3)}}} \left(\cos (\pi \delta - 2\Pi_1^{(3)} - \gamma_4) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) \right), \tag{12.8.2}$$

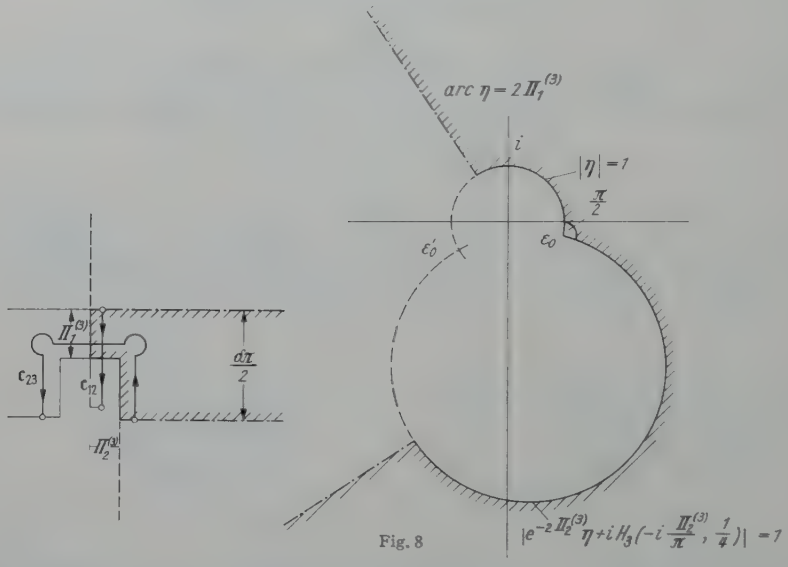

Fig. 8

mit

$$\gamma_4 = \arc H_3\left(i \frac{\Pi_2^{(3)}}{\pi}, \frac{1}{4}\right).$$

12.9. Die Entwicklungen des letzten Abschnitts umfassen auch den Fall $\Pi_2^{(4)} = 0$. In diesem Spezialfall sind die bisher betrachteten konfluenten hypergeometrischen Funktionen die in (4.4.3) definierten Zylinderfunktionen. Die konforme Abbildung zeigt Fig. 9. Aus (12.8.1), (12.8.2) wird:

$$\cos \pi \delta_{12} = \sqrt{2} \cos 2\Pi_1^{(4)} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \tag{12.9.1}$$

$$\cos \pi \delta_{23} = \sqrt{2} \cos (\pi \delta - 2\Pi_1^{(4)}) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{12.9.2}$$

12.10. Lamésche Polynome. In der Potentialtheorie interessieren solche Lösungen der Laméschen Differentialgleichung, die, abgesehen von einem Faktor der Form

$$(x - e_1)^{a_1} (x - e_2)^{a_2} (x - e_3)^{a_3},$$

Polynome in x sind. Man überlegt sich leicht, daß in diesem Fall das zugehörige Kreisbogenviereck als Geradenviereck dargestellt werden kann. Es

läßt sich nämlich $\eta(x)$ darstellen in der Form

$$\eta(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y_2^2(x)} \,. \tag{12.10.1}$$

Ist nun $y_2(x)$ — abgesehen von dem erwähnten Faktor — ein Polynom, so stellt (12.10.1) ein Schwarz-Christoffelsches Integral dar, das die obere Halbebene auf ein Geradenpolygon abbildet.

Eine genauere Untersuchung zeigt, daß dieser Fall nur eintreten kann, wenn $\delta = n + \frac{1}{2}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ ist. Es gibt bei festem k dann $2n-1$ verschiedene Werte b, für die Polynomlösungen auftreten. Die Größen δ_{12} und

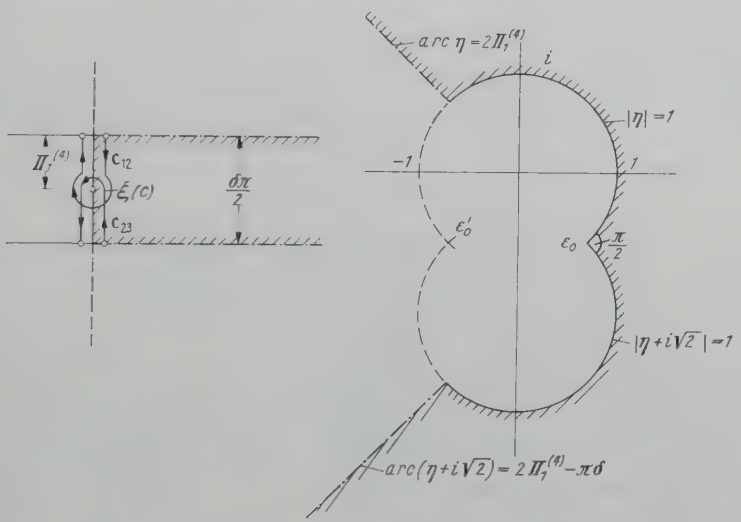

Fig. 9

δ_{23} sind dann beide ganze Zahlen. Die eben entwickelten Abschätzungen zeigen, daß dieser Fall nur eintreten kann, wenn bei der hier betrachteten Liouville-Transformation $e_3 < c < e_1$ ist.

Die Abschätzungen in 12.7 versagen gerade in diesem Fall, dagegen gibt 12.8 die Verhältnisse insofern gut wieder, als in (12.8.1) und (12.8.2) $\cos \pi\delta_{12}$ und $\cos \pi\delta_{23}$ beide gleichzeitig $\pm 1 + O(1/\varrho)$ werden. Geometrisch läßt sich das so deuten, daß in diesem Fall die beiden Strahlen in Fig. 8 sich schneiden im Punkt ε_0 oder dem anderen Schnittpunkt der Kreise, den wir ε_0' nennen wollen. In diesem Punkt schneiden sich dann alle Seiten des Kreisbogenvierecks; bringen wir diesen Punkt durch eine lineare Abbildung nach Unendlich, so entsteht das erwähnte Geradenpolygon.

Die Stellen auf dem Rand des Kreisbogenvierecks, die den Punkt ε_0 bzw. ε_0' überdecken, entsprechen den Nullstellen des Laméschen Polynoms, sofern sie nicht gerade in die Ecke des Vierecks fallen. Die Anzahl der Ecken, die

auf dieser Stelle liegen, bestimmen den Faktor vor dem Laméschen Polynom; wir erhalten Lamésche Funktionen erster, zweiter, dritter oder vierter Art, je nachdem keine, eine, zwei oder drei Ecken des Kreisbogenvierecks auf der Stelle ε_0 bzw. ε_0' liegen. Wir können so durch rein geometrische Betrachtung

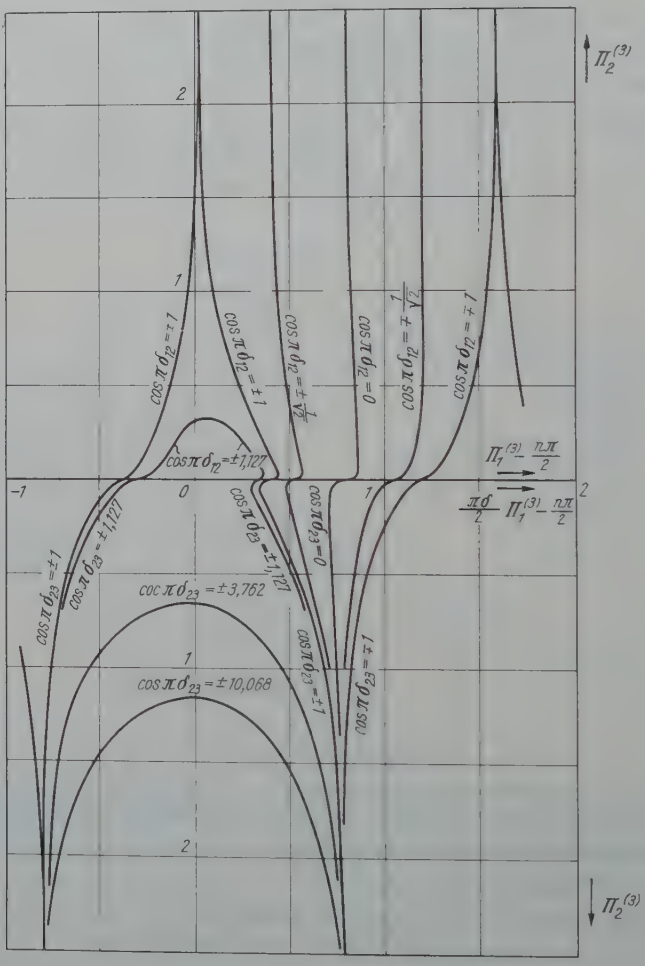

Fig. 10

die Art der Laméschen Funktion und die Anzahl ihrer Nullstellen in jedem Intervall bestimmen[12]).

Sei jetzt $u^*(\xi)$ die zur Laméschen Funktion gehörige Lösung der transformierten Differentialgleichung, d.h.

$$u^*(\xi) = \sqrt[4]{\varphi(x)}\, y_2(x),$$

[12]) Vgl. STALLMANN [4].

wo $y_2(x)$ die Lamésche Funktion ist, so läßt sich $u^*(\xi)$ wie in 12.8 abschätzen durch

$$u^*(\xi) = \left(v_1^{(1)}(\xi) - \varepsilon_0^{(\prime)} v_1^{(2)}(\xi)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \tag{12.10.2}$$

Fig. 10 zeigt, bei welchem Werte $\Pi_1^{(3)}$ und $\Pi_2^{(3)}$ Lamésche Polynome nach (12.8.1), (12.8.2) auftreten. Aus den Formeln in 12.2 lassen sich dann die zugehörigen k und b bestimmen. Diese Größen lassen sich bekanntlich auch direkt auf algebraischem Wege berechnen, wie ja überhaupt die Lösungen der Laméschen Differentialgleichung für $\delta = n + \frac{1}{2}$ explizit angegeben werden können[13]). Bei kleinen n ergibt das eine Kontrollmöglichkeit für unsere Abschätzungen[14]). Für größere n werden die exakten Formeln sehr kompliziert, so daß unsere Abschätzungen dort mit Vorteil anzuwenden sind.

12.11. Mathieusche Funktionen. Die in § 12 durchgeführten Untersuchungen lassen auch den Grenzübergang $\delta \to \infty$ zu. Das entspricht der Mathieuschen Differentialgleichung. Diese Differentialgleichung, die üblicherweise in der Form[15]) gegeben wird:

$$y'' + (\lambda - 2h^2 \cos 2z)\, y = 0, \tag{12.11.1}$$

läßt sich durch die Transformationen $x = \cos^2 z$ und

$$\xi(x) = h \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{x - c}{x(1-x)}}, \qquad c = \frac{\lambda}{4h^2} + \frac{1}{2}, \tag{12.11.2}$$

bei reellen λ und h^2 auf die Form (1.4) und (2.4) bringen. Das ξ-Polygon, das zu der Transformation (12.11.2) gehört, entspricht — je nach den speziellen Werten von h^2 und λ — einem der in Fig. 1 dargestellten Polygone mit $\delta = \infty$, d.h. der Halbstreifen der Breite $\frac{\pi\delta}{2}$ ist in einen Quadranten übergegangen.

Die Größen Π_1 bzw. $\Pi_1 - \frac{\delta\pi}{2}$ und Π_2 bleiben endlich; es sind jetzt vollständige elliptische Integrale zweiter Gattung. Dementsprechend bleibt einer der Wege $\mathfrak{C}_{ik}$ — und zwar der, der einem geschlossenen Umlauf um die Punkte $x = 0$ und $x = 1$ entspricht — endlich, und die zugehörige Größe δ_{ik} strebt für $\delta \to \infty$ einem endlichen Grenzwert zu. Diese Größe ist der charakteristische Exponent[16]) der zugehörigen Mathieuschen Funktionen, für den wir damit ebenfalls asymptotische Abschätzungen gegeben haben.

---

[13]) v. Koppenfels [1], [2].

[14]) Durchgerechnete Beispiele zeigen schon im Fall $\delta = \frac{3}{2}$ nur wenige Prozent Abweichung vom exakten Wert. Soweit die Größe $\cos \pi \delta_{ik}$ mit Hilfe der Exponentialfunktion abgeschätzt wird, lassen sich noch weitere Verbesserungen der Fehlerschranken dadurch erreichen, daß man die Größe $\frac{Q(\xi)}{\varrho^2}$, die ja als Funktion von x explizit angegeben werden kann, in dem betrachteten Intervall möglichst klein macht, ähnlich wie dies in 11.4 und 11.5 geschehen ist.

[15]) Meixner und Schäfke [3], S. 98.

[16]) Meixner und Schäfke [3], S. 101.

Je nachdem der charakteristische Exponent ν reell oder imaginär ist, d.h. je nachdem $|\cos \pi\nu| \lesseqgtr 0$ ist, erhalten wir stabile oder instabile Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung. Die in Fig. 10 dargestellten Linien $\cos \nu_i \delta_{iK} = \pm 1$ geben also gerade die Grenze zwischen stabilen und instabilen Parameterwerten an[17]), wobei allerdings noch die Größen Π_1 und Π_2 auf Grund von (12.11.2) in λ und h ausgedrückt werden müssen.

Mit den gleichen mathematischen Hilfsmitteln lassen sich auch die Sphäroidfunktionen und insbesondere ihre charakteristischen Exponenten abschätzen.

Literatur

[1] Koppenfels, W. v.: Konforme Abbildung besonderer Kreisbogenvierecke. J. reine u. angew. Math. **181**, 83—124 (1940). — [2] Koppenfels, W. v.: Konforme Abbildung ausgezeichneter Kreisbogenvierecke. Sitzgsber. math.-naturwiss. Abt. bayr. Akad. Wiss. **1943**, 327—343. — [3] Meixner, J., u. F. W. Schäfke: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954. — [4] Stallmann, F.: Konforme Abbildung gewisser Kreisbogenvierecke als Eigenwertproblem. Math. Z. **59**, 211—230 (1953).

[17]) Vgl. Meixner und Schäfke [3], S. 132.

Mathematisches Institut der Universität Gießen, Johannesstr. 1

(Eingegangen am 3. August 1956)

Saksena, K. M.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 267—271 (1957)

On a generalized Laplace integral

By

K. M. Saksena

Meijer [9] introduced a generalization of the Laplace integral in the form

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}xt}(xt)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2},m}(xt)\,\varphi(t)\,dt$$

where $W_{k,m}$ denotes Whittaker's function. This reduces to the ordinary Laplace integral when $k = -m$.

Varma [5] considered a modification of this integral in the form

$$f(x) = \int_0^\infty (xt)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}xt} W_{k,m}(xt)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

which becomes Laplace's integral when $k+m=\frac{1}{2}$. Φ this integral converges for $m > -\frac{1}{2}$ and we shall assume that m satisfies this condition.

The object of this note is to give necessary and sufficient conditions in terms of an inversion operator for a given function $f(x)$ to be representable in the form (1).

We define differential operators U_q, V_q by

$$U_0[f(x)] = f(x)$$
$$U_1[f(x)] = (-1)\,x^{m-k-\frac{3}{2}} D[x^{k-m+\frac{1}{2}} f(x)]$$
$$U_q[f(x)] = (-1)^q\, x^{m-k-q-\frac{1}{2}} D^q[x^{k-m+\frac{1}{2}} f(x)] \qquad (q = 2, 3, \ldots)$$

where $D \equiv x^2 \frac{d}{dx}$ and

$$V_q[f(u)] = \frac{u^{-1}}{\Gamma(q+k+m-\frac{1}{2})}\left[U_q[f(x)]\right]_{x=\frac{q+k+m-\frac{1}{2}}{u}}.$$

Theorem 1. *If $\varphi(t)$ is integrable in $0 \leqq t \leqq R$ for every positive R and $\int_0^t \varphi(u)\,du = O(e^{\gamma t})$ for some γ $(t \to \infty)$ then $\varphi(u) = \lim_{q\to\infty} V_q[f(u)]$ for almost all positive u.*

This theorem has been proved earlier [4]. For the sake of completeness an outline of the proof is given here. Under the hypothesis of the theorem the integral (1) converges for $x > \gamma$ [3] and we may evaluate the derivatives of $f(x)$ by differentiation under the integral sign.

Using the relation [2]

$$x^2 \frac{d}{dx}\left[x^k e^{-\frac{1}{2}x} W_{k,m}(x)\right] = -x^{k+1} e^{-\frac{1}{2}x} W_{k+1,m}(x)$$

we find that

$$U_q[f(x)] = \int_0^\infty (xt)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}xt} W_{k+q,m}(xt)\, \varphi(t)\, dt.$$

It is easy to see that these integrals exist under the hypotheses of the theorem. Making a slight change of variable and substituting the asymptotic estimate of $W_{k,m}(x)$ for large x ([6], p. 343) we find that

$$\lim_{q\to\infty} \frac{u^{-1} U_q\left[f\left(\frac{q+k+m-\frac{1}{2}}{u}\right)\right]}{\Gamma(q+k+m-\frac{1}{2})} \sim \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty (\lambda v)^\lambda e^{-\lambda v} \varphi(uv)\, dv$$

where $\lambda = q+k+m-\frac{1}{2}$

$= \varphi(u)$

as, for almost all positive u [7],

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty y^n e^{-ny}\{\varphi(uy) - \varphi(u)\}\, dy = 0.$$

Theorem 2. *The necessary and sufficient conditions that a given function $f(x)$ may have the representation* (1) *with $\varphi(t)$ bounded are that*

(i) *$f(x)$ is infinitely differentiable on* $(0, \infty)$,

(ii) *$f(x) \to 0$ for $x \to \infty$,*

and (iii) $|V_q[f(u)]| \leq M \quad (0 < u < \infty;\ q = 1, 2, \ldots)$

where M is a constant.

The necessity of the conditions (i) and (ii) is obvious and the necessity of (iii) follows from Theorem 1.

For

$$|V_q[f(u)]| \leq \frac{\lambda^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\infty v^\lambda e^{-\lambda v} |\varphi(uv)|\, dv$$

$$\leq \text{l.u.b.}\, |\varphi(t)| = M$$

$$0 \leq t < \infty.$$

To prove the sufficiency let us suppose that the conditions are satisfied. Let us consider the integral

$$I = \int_0^\infty (xt)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}xt} W_{k,m}(xt)\, V_q[f(t)]\, dt.$$

Changing the variable from t to u by the transformation $ut = \lambda$ and noting that

$$V_q\left[f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\right] = \frac{u}{\Gamma(\lambda+1)} U_q[f(u)],$$

we get

$$I = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \frac{1}{u} \left(x\frac{\lambda}{u}\right)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x\frac{\lambda}{u}} W_{k,m}\left(x\frac{\lambda}{u}\right) U_q[f(u)]\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty h(u,x)\, U_q[f(u)]\, du\,,$$

where

$$h(u,x) = \frac{1}{u}\left(x\frac{\lambda}{u}\right)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x\frac{\lambda}{u}} W_{k,m}\left(x\frac{\lambda}{u}\right).$$

Now

$$U_q[f(x)] = x^{-a-q}\left(-x^2\frac{d}{dx}\right)^q [x^a f(x)] = y^{a+q}\left(\frac{d}{dy}\right)^q [y^{-a} f(y^{-1})]\,,$$

where $y = \frac{1}{x}$ and $a = k - m + \frac{1}{2}$.

This is easily seen to be of the form $\sum_{r=0}^{q} A_r y^{-r} f^{(r)}(y^{-1})$ or $\sum_{r=0}^{q} A_r x^r f^{(r)}(x)$. So U_q is an Euler operator [*1*] of order q. If its adjoint be $\overline{U}_q = \overline{U}_{q,u}$, we have [*1*]

$$I = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty f(u)\, \overline{U}_{q,u}[h(u,x)]\, du$$

provided that

(2) $$u^{r+s+1} \frac{d^r}{du^r}[f(u)] \frac{\partial^s}{\partial u^s}[h(u,x)] \to 0$$

as $u \to 0$ and as $u \to \infty$ for $r, s = 0, 1, 2, \ldots, q-1$. Now

$$h(u,x) = \frac{1}{u}\left(x\frac{\lambda}{u}\right)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x\frac{\lambda}{u}} W_{k,m}\left(x\frac{\lambda}{u}\right).$$

As $u \to 0$, $h(u,x) = O\left(u^{-k-m-\frac{1}{2}} e^{-x\frac{\lambda}{u}}\right) = o(1)$

and as $u \to \infty$, this is

(3) $$= O(u^{-2m-1}) \quad \text{if } m < 0 \quad \text{and} \quad O(u^{-1}) \quad \text{if } m > 0$$

since ([*6*], p. 346) $W_{k,m}(x) = O(x^{\pm m + \frac{1}{2}})$ as $x \to 0$.

Using the property

$$\frac{d}{dx}[x^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} W_{k,m}(x)] = -x^{m-1} e^{-\frac{1}{2}x} W_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(x)$$

and the asymptotic estimate of $W_{k,m}(x)$ it is easily seen that $h^{(s)}(u,x) = o(1)$ as $u \to 0$.

Also

$$\left.\begin{array}{ll} h''(u,x) = O(u^{-2m-3}) & (m<0) \\ \text{or} \quad O(u^{-3}) & (m>0) \end{array}\right\} \quad \text{as } u \to \infty.$$

Therefore by using a theorem of HARDY and LITTLEWOOD ([8], p. 193), we conclude with the help of (3) that

$$\left.\begin{array}{lll} h^{(s)}(u,x) = O(u^{-2m-s-1}) & (m<0) \\ \text{or} \quad O(u^{-s-1}) & (m>0) \end{array}\right\} \quad \text{as } u\to\infty.$$

Also the hypotheses of the theorem imply in particular that $f(u)=O(u^{-1})$ and, in general, that $f^{(r)}(u)=O(u^{-r-1})$ for $0<u<\infty$.

Therefore

$$\left.\begin{array}{lll} f(u) = O(u^{-1}) & \text{as} & u\to 0 \\ = o(1) & \text{as} & u\to\infty \end{array}\right\}. \tag{4}$$

Using the same theorem of HARDY and LITTLEWOOD again we have $f^{(r)}(u)=o(u^{-r})$ as $u\to\infty$. When $m>0$,

$$u^{r+s+1}\frac{d^r}{du^r}[f(u)]\,\frac{\partial^s}{\partial u^s}[h(u,x)] = u^{r+s+1}\,o(u^{-r})\cdot O(u^{-s-1}) = o(1)$$

and when $m<0$, this is $=o(u^{-2m})=o(1)$ $(u\to\infty)$ as we had supposed that $m>-\frac{1}{2}$.

In a similar way we can show that (2) is satisfied when $u\to 0$. Now $h(u,x)$ is homogeneous in u and x and of order -1. Hence [1]

$$\bar{U}_{q,u}[h(u,x)] = U_{q,x}[h(u,x)]$$

and

$$I = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty f(u)\,U_{q,x}[h(u,x)]\,du = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty \frac{1}{t}\,(\lambda t)^{m-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\lambda t}W_{k+q,m}(\lambda t)\,f\left(\frac{x}{t}\right)dt$$

after a change of variable. For large λ this is $\sim \frac{\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty (\lambda t)^{\lambda-1}e^{-\lambda t}f\left(\frac{x}{t}\right)dt$ (noting that $\lambda = q+k+m-\frac{1}{2}$)

$$= \frac{\lambda^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-\lambda t}f\left(\frac{x}{t}\right)dt = \frac{x^\lambda\lambda^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\infty v^\lambda e^{-\lambda v x}\left\{\frac{1}{v}\,f\left(\frac{1}{v}\right)\right\}dv.$$

Now let $\frac{1}{v}\,f\left(\frac{1}{v}\right)=\psi(v)$. Then on account of (4) we have $\frac{1}{v}\,f\left(\frac{1}{v}\right)=O(1)$ as $v\to\infty$ and $f\left(\frac{1}{v}\right)=o(1)$ as $v\to 0$.

Hence it is easily seen that (i) $\psi(v)\,\varepsilon L(R^{-1}\leqq v\leqq R)$ for every $R>1$, (ii) $\int_1^\infty \psi(v)\,e^{-cv}\,dv$ converges for any fixed $c>0$ and (iii) $\int_0^1 v\,\psi(v)\,dv$ also converges. Therefore by a theorem of WIDDER ([8], p. 283)

$$\lim_{\lambda\to\infty} I = \frac{1}{x}\,\psi\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

Now $\omega(xt)\equiv(xt)^{m-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}xt}W_{k,m}(xt)$ clearly εL in $0\leqq t\leqq\infty$ under the condition assumed for the convergence of the integral (1). Therefore, by a theorem

on weak compactness of a set of functions ([8], p. 33) the inequalities in the hypothesis (iii) of the theorem imply the existence of a subset $\{q_i\}$ of the positive integers and a bounded function $\varphi(t)$ such that

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^\infty [V_{q_i}[f(t)]]\,\omega(xt)\,dt = \int_0^\infty \omega(xt)\,\varphi(t)\,dt.$$

Hence

$$f(x) = \int_0^\infty \omega(xt)\,\varphi(t)\,dt = \int_0^\infty (xt)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}xt} W_{k,m}(xt)\,\varphi(t)\,dt$$

and the theorem is proved.

References

[1] Boas, R. P., and D. V. Widder: The iterated Stieltjes transform. Trans. Amer. Math. Soc. **45**, 1—72 (1939). — [2] Goldstein, S.: Operational representation of Whittaker's Confluent Hypergeometric Function and Weber's Parabolic Cylinder Function. Proc. Lond. Math. Soc. **34**, 103—125 (1932). — [3] Saksena, K. M.: Study of a generalized Laplace transform. Proc. Nat. Acad. Sci. India A **21**, 201—208 (1952). — [4] Saksena, K. M.: Inversion formulae for a generalized Laplace Integral. Proc. Nat. Inst. Sci. India **19**, 173—181 (1953). — [5] Varma, R. S.: On a generalization of Laplace Integral. Proc. Nat. Acad. Sci. India A **20**, 209—216 (1951). — [6] Whittaker, E. T., and G. N. Watson: Modern Analysis. 1946. — [7] Widder, D. V.: The inversion of the Laplace integral and the related moment problem. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 107—200 (1934). — [8] Widder, D. V.: The Laplace Transform. 1941. — [9] Meijer, C. S.: Eine neue Erweiterung der Laplace-Transformation. I. Proc. Sect. Sc. Amsterdam Akad. Wet. **44**, 727—737 (1941).

D. S. B. Government College, Nainital, U. P., India

(Eingegangen am 18. Juni 1956)

NARAIN, R.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 272—281 (1957)

Certain properties of generalized Laplace transform involving Meijer's G-function

By
ROOP NARAIN

1. Generalizations of the classical Laplace transform

$$\varphi(s) = s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \tag{1.1}$$

have been given from time to time by various mathematicians. Some of them are as follows.

(i) The generalization due to MEIJER [1]

$$\varphi(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty (st)^{\frac{1}{2}} K_m(st) f(t)\,dt. \tag{1.2}$$

(ii) The Meijer transform ([2], p. 730)

$$\varphi(s) = \int_0^\infty (st)^{-k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2},m}(st) f(t)\,dt. \tag{1.3}$$

(iii) The generalization due to BOAS ([3], p. 286)

$$\varphi(s) = \int_0^\infty g(s,t) f(t)\,dt. \tag{1.4}$$

(iv) The Whittaker transform ([4], p. 17)

$$\varphi(s) = s\int_0^\infty (2st)^{-\frac{1}{2}} W_{k,m}(2st) f(t)\,dt. \tag{1.5}$$

VARMA ([5], p. 209) introduced another generalization of (1.1) in the form

$$\varphi(s) = s\int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st) f(t)\,dt. \tag{1.6}$$

We denote the generalized transform (1.6) symbolically by

$$\varphi(s:k,m) = W[f(t);k,m],$$

where $\varphi(s:k,m) = \varphi(s)$.

When $k+m=\frac{1}{2}$, (1.6) reduces to (1.1), due to the identity

$$z^{m-\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}-m,m}(z) = e^{-\frac{1}{2}z}.$$

We shall denote (1.1) by the usual notation,

$$\varphi(s) \div f(t).$$

As in the case of Laplace transform, we shall call $\varphi(s:k,m)$ the *image* of $f(t)$, or the *generalized Laplace transform* of $f(t)$, and $f(t)$ shall be called the *original* of $\varphi(s:k,m)$.

In this paper we have obtained certain theorems for this generalized transform and have applied them in evaluating a few infinite integrals. Most of the integrals evaluated involve MEIJER'S G-function and MACROBERT'S E-function. The importance of the results obtained lies due to the fact that a great many of the special functions, appearing in applied mathematics, are particular cases of G-function and E-function and so the results obtained are quite general. From these a number of results can be deduced for Bessel, Legendre, Whittaker functions, their combinations and other related functions as particular cases.

2. We start here by obtaining the generalized transforms based on (1.6) of certain functions by making use of certain known integrals involving $W_{k,m}(x)$. Most of these will be required in our investigation later on.

(a) Let in (1.6), $f(t)=t^{-\nu}e^{-\frac{a}{2t}}W_{\lambda,\mu}\left(\frac{a}{t}\right)$. Then

$$\varphi(s:k,m)=s^{m+\frac{1}{2}}\int_0^\infty t^{m-\nu-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left((st)+\frac{a}{t}\right)\right]W_{k,m}(st)\,W_{\lambda,\mu}\left(\frac{a}{t}\right)dt.$$

Evaluating this integral by a known integral ([6], p. 412, eqn. (54)), we obtain

$$(2.1)\qquad \left\{\begin{array}{l} W\left[t^{-\nu}e^{-\frac{a}{2t}}W_{\lambda,\mu}\left(\frac{a}{t}\right);k,m\right]=a^{1-\nu}s\,G^{4,0}_{2,4}\left(as\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}-k+m,\nu-\lambda\\ \frac{1}{2}+m,0,\nu+\mu-\frac{1}{2},\nu-\mu-\frac{1}{2}\end{matrix}\right),\\ \qquad\qquad R(a)>0\quad\text{and}\quad R(s)>0.\end{array}\right.$$

Giving suitable values to the parameters in (2.1), we get a number of results obtained by RATHIE ([7], p. 383).

Using known integrals ([6], p. 412, eqn. (55); p. 411, eqn. (46); and p. 411, eqn. (45)), we obtain in a similar manner the following images[1]).

$$(2.2)\qquad \left\{\begin{array}{l} W\left[t^{-\nu}e^{\frac{a}{2t}}W_{\lambda,\mu}\left(\frac{a}{t}\right);k,m\right]=\dfrac{a^{1-\nu}s}{\Gamma_*(\frac{1}{2}-\lambda\pm\mu)}\,G^{4,1}_{2,4}\left(as\,\middle|\,\begin{matrix}\lambda+\nu,\frac{1}{2}-k+m\\ \frac{1}{2}+m,0,\nu+\mu-\frac{1}{2},\nu-\mu-\frac{1}{2}\end{matrix}\right),\\ \quad|\arg a|<\frac{3\pi}{2},\ R(s)>0\quad\text{and}\quad R(\lambda-\nu+1+m\pm m)>0;\end{array}\right.$$

$$(2.3)\qquad \left\{\begin{array}{l} W\left[t^{-\nu}e^{-\frac{1}{2}at}W_{\lambda,\mu}(at);k,m\right]=a^{\nu}\,G^{2,2}_{3,3}\left(\frac{a}{s}\,\middle|\,\begin{matrix}0,-2m,1-\lambda-\nu\\ \frac{1}{2}+\mu-\nu,\frac{1}{2}-\mu-\nu,k-m-\frac{1}{2}\end{matrix}\right),\\ R(a)>0\quad R(s)>0\quad\text{and}\quad R(\tfrac{3}{2}-\nu+m\pm m\pm\mu)>0;\end{array}\right.$$

and

$$(2.4)\qquad \left\{\begin{array}{l} W\left[t^{-\nu}e^{\frac{1}{2}at}W_{\lambda,\mu}(at);k,m\right]=\dfrac{a^{\nu}}{\Gamma_*(\frac{1}{2}-\lambda\pm\mu)}\,G^{2,3}_{3,3}\left(\frac{a}{s}\,\middle|\,\begin{matrix}0,-2m,1+\lambda-\nu\\ \frac{1}{2}+\mu-\nu,\frac{1}{2}-\mu-\nu,k-m-\frac{1}{2}\end{matrix}\right),\\ \qquad R(s)>0\quad\text{and}\quad R(\tfrac{3}{2}-\nu+m\pm m\pm\mu)>0).\end{array}\right.$$

[1]) For the sake of brevity the symbol $\Gamma_*(\alpha\pm\beta)$ has been employed to denote $\Gamma(\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha-\beta)$.

(b) Let in (1.6), $f(t) = t^{\delta} E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p : \beta_1, \ldots, \beta_q : \frac{z}{t^n}\right)$, then using a known integral ([6], p. 416, eqn. (10)), we get[2])

$$(2.5)\quad \begin{cases} W\left[t^{\delta} E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p : \beta_1, \ldots, \beta_q : \frac{z}{t^n}\right);\ k, m\right] \\ \qquad = (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n}\, n^{\delta+k+m}\, s^{-\delta} E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+2n} : \beta_1, \ldots, \beta_{q+n} : z\left(\frac{s}{n}\right)^n\right), \end{cases}$$

where $n = 1, 2, \ldots$, $\alpha_{p+r} = \frac{1}{n}(\delta + r)$, $\alpha_{p+n+r} = \frac{1}{n}(\delta + r + 2m)$, $\beta_{q+r} = \frac{1}{n}(\delta + r + m - k + \frac{1}{2})$, $r = 1, 2, \ldots, n$, provided $R(\delta + 1 + m \pm m) > 0$.

When $k + m = \frac{1}{2}$, (2.5) reduces to[3])

$$(2.6)\quad \begin{cases} t^{\delta} E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p : \beta_1, \ldots, \beta_q : \frac{z}{t^n}\right) \\ \qquad \div (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n}\, n^{\delta+\frac{1}{2}}\, s^{-\delta} E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+n} : \beta_1, \ldots, \beta_q : z\left(\frac{s}{n}\right)^n\right), \end{cases}$$

where $n = 1, 2, \ldots$, $\alpha_{p+r} = \frac{1}{n}(\delta + r)$, $r = 1, 2, \ldots, n$, provided $R(\delta + 1) > 0$.

(c) Here we establish a correspondence by making use of PARSEVAL-GOLDSTEIN's Theorem ([9], p. 104) of Laplace transform which states that if $\varphi_1(s) \div f_1(t)$ and $\varphi_2(s) \div f_2(t)$, then

$$\int_0^{\infty} f_1(t)\, \varphi_2(t)\, \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} f_2(t)\, \varphi_1(t)\, \frac{dt}{t}.$$

It is known that ([8], p. 217)

$$(i)\qquad t^{-k} e^{-\frac{a}{2t}} W_{k,m}\left(\frac{a}{t}\right) \div 2 \mid a\ s^{k+\frac{1}{2}} K_{2m}(2\sqrt{a s}), \qquad R(a) > 0,\ R(s) > 0,$$

and that ([8], p. 222)

$$t^{-\sigma} G^{l,n}_{p,q}\left(t \middle| \begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{matrix}\right) \div s^{\sigma} G^{l,n+1}_{p+1,q}\left(\frac{1}{s} \middle| \begin{matrix} \sigma, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{matrix}\right),$$

$$R(\sigma - 1) < R(\beta_j),\ j = 1, 2, \ldots, l, \qquad |\arg s| < (l + n - \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}q)\pi$$

and

$$p + q < 2(l + n).$$

We write the latter as

$$(ii)\qquad t^{-\sigma} G^{l,n}_{p,q+1}\left(\beta t \middle| \begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q, \sigma \end{matrix}\right) \div s^{\sigma} G^{l,n}_{p,q}\left(\frac{\beta}{s} \middle| \begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{matrix}\right),$$

$$R(\sigma - 1) < R(\beta_j),\ j = 1, 2, \ldots, l, \qquad \left|\arg \frac{s}{\beta}\right| < (l + n - \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2})\pi$$

and

$$p + q + 1 < 2(l + n).$$

[2]) The particular case when $n = 1$ is known ([7], p. 384).
[3]) The particular case when $n = 1$ is known ([8], p. 222).

Using the operational relations (i) and (ii) in PARSEVAL-GOLDSTEIN'S Theorem, we get

$$\int_0^\infty t^{\sigma-k-1} e^{-\frac{a}{2t}} W_{k,m}\left(\frac{a}{t}\right) G_{p,q}^{l,n}\left(\frac{\beta}{t}\Big|_{\beta_1,\ldots,\beta_q}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\right) dt$$

$$= 2\sqrt{a}\int_0^\sim t^{k-\sigma-\frac{1}{2}} K_{2m}\left(2\sqrt{at}\right) G_{p,q+1}^{l,n}\left(\beta t\Big|_{\beta_1,\ldots,\beta_q,\sigma}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\right) dt.$$

Replacing a by s and σ by $k-\frac{1}{2}-\varrho+m$ on both the sides, t by $\frac{1}{v}$ on the left hand side and t by $\frac{x}{s}$ on the right hand side, we obtain

$$s\int_0^\infty (sv)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}sv} W_{k,m}(sv)\, v^{-\varrho} G_{p,q}^{l,n}\left(\beta v\Big|_{\beta_1,\ldots,\beta_q}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\right) dv$$

$$= 2s^\varrho \int_0^\sim x^{-(\varrho-m)} K_{2m}(2x^{\frac{1}{2}})\, G_{p,q+1}^{l,n}\left(\frac{\beta}{s}\, x\Big|_{\beta_1,\ldots,\beta_q,\varrho+k-m-\frac{1}{2}}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\right) dx.$$

Evaluating the integral on the right hand side by a known integral ([6], p. 421, eqn. (11)), we obtain

$$(2.7)\qquad W[t^{\varrho} G_{p,q}^{l,n}\left(\beta t\Big|_{\beta_1,\ldots,\beta_q}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\right); k, m] = s^\varrho G_{p+2,q+1}^{l,n+2}\left(\frac{\beta}{s}\Big|_{\beta_1,\ldots,\beta_q,\varrho+k-m-\frac{1}{2}}^{\varrho-2m,\varrho,\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\right),$$

$R(\varrho-1-m\pm m) < R(\beta_j)$, $j=1,2,\ldots,l$, $\left|\arg\frac{s}{\beta}\right| < (l+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2})\pi$ and

$$p+q+1<2(l+n).$$

3. Theorem 1. *If*

$$W[t^\sigma h(t); \lambda, \mu] = \varphi(s:\lambda,\mu:\sigma)$$

and

$$(3.1)\qquad W[g(t); k, m] = s^\varrho h\left(\frac{1}{s}\right),$$

then

$$(3.2)\qquad \int_0^\sim g(t)\, G_{2,4}^{4,0}\left(st\Big|_{\frac{1}{2}m,0,\nu+\mu-\frac{1}{2},\nu-\mu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-k+m,\nu-\lambda}\right) dt = s^{\nu-\mu-\frac{3}{2}}\varphi\left(s:\lambda,\mu:\nu-\mu-\varrho-\tfrac{1}{2}\right),$$

provided $R(s)>0$, the integral in (3.2) is absolutely convergent and the generalized Laplace transforms of $|g(t)|$ and $|t^{\nu-\mu-\varrho-\frac{1}{2}}h(t)|$ exist.

Proof. Applying generalized PARSEVAL-GOLDSTEIN'S Theorem, viz., if

$$\varphi_1(s) = W[f_1(t); k, m] \quad \text{and} \quad \varphi_2(s) = W[f_2(t); k, m],$$

then

$$\int_0^\infty f_1(t)\,\varphi_2(t)\,\frac{dt}{t} = \int_0^\infty f_2(t)\,\varphi_1(t)\,\frac{dt}{t},$$

to the correspondences (2.1) and (3.1), and on simplification, we obtain

$$\int_0^\infty g(t)\, G_{2,4}^{4,0}\left(at \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}-k+m, \nu-\lambda \\ \frac{1}{2}m, 0, \nu+\mu-\frac{1}{2}, \nu-\mu-\frac{1}{2} \end{matrix}\right) dt$$

$$= a^{\nu-\mu-\frac{1}{2}} \int_0^\infty (at)^{\mu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}at} W_{\lambda,\mu}(at)\, t^{\nu-\mu-\varrho-\frac{1}{2}} h(t)\, dt$$

$$= a^{\nu-\mu-\frac{3}{2}} \varphi\left(a : \lambda, \mu : \nu-\mu-\varrho-\tfrac{1}{2}\right),$$

provided $R(a)>0$ and the integral converges absolutely.

3.1. Corollaries.

(i) Putting $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$, $\sigma=0$, $\varrho=m-k+\frac{1}{2}$ and $\nu=\mu+1-k+m$, the theorem reduces to a known result ([*10*], p. 67).

(ii) Putting $k+m=\frac{1}{2}$, $\sigma=0$, $\varrho=\lambda-\mu-\frac{1}{2}$ and $\nu=\lambda$, the theorem reduces to another known result ([*10*], p. 73).

(iii) Putting $\sigma=0$, $\varrho=\frac{1}{2}$, $\lambda=k$ and $\mu=\nu-1=m$ in the theorem, we get

$$\varphi(s : k, m) = \sqrt{s} \int_0^\infty g(t)\, G_{2,4}^{4,0}\left(st \,\middle|\, \begin{matrix} m-k+\frac{1}{2}, m-k+1 \\ 2m, 0, 2m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{matrix}\right) dt$$

$$= 2^{-2k+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi s} \int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{4}} e^{-\sqrt{st}}\, W_{2k-\frac{1}{2}, 2m}\left(2\sqrt{st}\right) g(t)\, dt.$$

Replacing k by $\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}$, m by $\frac{1}{2}m$, s by s^2 and t by $\frac{1}{4}t^2$ in this equation, we arrive at the following known result obtained by the author in a different manner in an earlier paper [*11*]:

If

$$\varphi(s : k, m) = W[h(t); k, m]$$

and

$$\sqrt{s}\, h\left(\frac{1}{s}\right) = W[g(t); k, m],$$

then

$$\varphi\left(s^2 : \tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}m\right) = W\left[\frac{\sqrt{\pi}\, t}{2^{\frac{1}{2}+k+m}}\, g\left(\frac{t^2}{4}\right); k, m\right],$$

provided the generalized Laplace transforms of $|g(t)|$ *and* $|t g(t^2/4)|$ *exist*

3.2. Example.

Let in Theorem 1, $g(t) = t^\delta E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p : \beta_1, \ldots, \beta_q : \frac{z}{t^n}\right)$, then, by (2.5),

$$s^\varrho h\left(\frac{1}{s}\right) = W[g(t); k, m]$$

$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n}\, n^{\delta+k+m}\, s^{-\delta} E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+2n} : \beta_1, \ldots, \beta_{q+n} : z\left(\frac{s}{n}\right)^n\right),$$

where $n=1, 2, \ldots, \alpha_{p+r}=\frac{1}{n}(\delta+r)$, $\alpha_{p+n+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+2m)$,

$$\beta_{q+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+m-k+\tfrac{1}{2}), \quad r=1, 2, \ldots, n,$$

provided

$$R(\delta+1+m\pm m)>0;$$

and so

$$t^{\sigma}h(t)=(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n}n^{\delta+k+m}t^{\delta+\sigma+\varrho}E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+2n}:\beta_1, \ldots, \beta_{q+n}:\frac{z}{(nt)^n}\right),$$

Therefore, again by (2.5),

$$\varphi(s:\lambda, \mu:\sigma)$$
$$=(2\pi)^{1-n}n^{2\delta+\lambda-\mu+k+m+\sigma+\varrho}s^{-\delta-\sigma-\varrho}E\left((\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+4n}:\beta_1, \ldots, \beta_{q+2n}:z\left(\frac{s}{n^2}\right)^n\right),$$

where

$$n=1, 2, \ldots, \alpha_{p+r}=\frac{1}{n}(\delta+r), \quad \alpha_{p+n+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+2m),$$

$$\alpha_{p+2n+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+\sigma+\varrho), \quad \alpha_{p+3n+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+2\mu+\sigma+\varrho),$$

$$\beta_{q+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+m-k+\tfrac{1}{2}), \quad \beta_{q+n+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+\sigma+\varrho+\mu-\lambda+\tfrac{1}{2}),$$

$$r=1, 2, \ldots, n,$$

provided $R(\delta+1+\sigma+\varrho+\mu\pm\mu)>0$.

Hence, from (3.2), after replacing $\frac{1}{2}-k+m+\delta$ by a_1, $\nu-\lambda+\delta$ by a_2, $2m+\delta$ by b_1, δ by b_2, $\nu+\mu-\frac{1}{2}+\delta$ by b_3 and $\nu-\mu-\frac{1}{2}+\delta$ by b_4, we have

$$(3.3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p:\beta_1, \ldots, \beta_q:\frac{z}{t^n}\right) G_{2,4}^{4,0}\left(ty\,\middle|\,{a_1, a_2 \atop b_1, b_2, b_3, b_4}\right) dt \\ =(2\pi)^{1-n}y^{-1}n^{b_1+b_2+b_3+b_4-a_1-a_2+1}E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+4n}:\beta_1, \ldots, \beta_{q+2n}:z\left(\frac{y}{n^2}\right)^n\right), \end{cases}$$

where

$$n=1, 2, \ldots, \alpha_{p+r}=\frac{1}{n}(b_1+r), \quad \alpha_{p+n+r}=\frac{1}{n}(b_2+r), \quad \alpha_{p+2n+r}=\frac{1}{n}(b_3+r),$$

$$\alpha_{p+3n+r}=\frac{1}{n}(b_4+r), \quad \beta_{q+r}=\frac{1}{n}(a_1+r), \quad \beta_{q+n+r}=\frac{1}{n}(a_2+r), \quad r=1, 2, \ldots, n,$$

provided $R(y)>0$, $R(b_j+1)>0$, $j=1, 2, 3, 4$ and $q\leq p$.

Taking $a_1=b_3$ and $a_2=b_4$ in (3.3), we get, after a little simplification, a known integral due to MacRobert ([12], p. 191, eqn. (10)).

4. Theorem 2. *If*

$$W[t^{\sigma}h(t);\lambda, \mu]=\varphi(s:\lambda, \mu:\sigma)$$

and

$$(4.1)\qquad W[g(t);k, m]=s^{-\varrho}h(s),$$

then

$$(4.2)\quad \int_0^{\infty} g(t)\,G_{3,3}^{2,2}\left(\frac{t}{s}\,\middle|\,{\nu-\mu-\frac{1}{2}, \nu+\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-k+m \atop 0, 2m, \lambda+\nu-1}\right)dt=s^{\frac{1}{2}-\mu-\nu}\varphi(s:\lambda, \mu:-\mu-\nu-\varrho-\tfrac{1}{2}),$$

provided $R(s)>0$, $R(\frac{3}{2}-\nu+m\pm m\pm\mu)>0$, *the integral in* (4.2) *is absolutely convergent and the generalized Laplace transforms of* $|g(t)|$ *and* $|t^{-(\mu+\nu+\varrho+\frac{1}{2})}h(t)|$ *exist.*

The theorem follows on applying the generalized PARSEVAL-GOLDSTEIN's Theorem to the correspondences (2.2) and (4.1) and proceeding as in the proof of Theorem 1.

4.1. Corollaries.

(i) Putting $k+m=\frac{1}{2}$, $\sigma=0$, $\varrho-l-2$ and $\nu=\frac{3}{2}-\mu-l$, Theorem 2 reduces to a known result ([*13*], p. 234).

(ii) Putting $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$, $\sigma=0$, $\varrho=l-2$ and $\nu=\frac{3}{2}-\mu-l$, Theorem 2 reduces to another known result ([*13*], p. 243).

(iii) Putting $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$ and also $k+m=\frac{1}{2}$, $\sigma=0$ and $\nu=-\mu-\varrho-\frac{1}{2}$, the theorem reduces to a well known result of Laplace transform ([*14*], p. 212).

5. Theorem 3. *If*

$$W[f(t);k,m]=\varphi(s:k,m)$$

and

$$W\left[t^{\sigma}f\left(\frac{1}{t}\right);\lambda,\mu\right]=\psi(s:\lambda,\mu:\sigma),$$

then

$$\left.\begin{aligned}\varphi(s:k,m)&=s^{m+1}\int_0^{\infty}x^{-(\beta+\mu+1)}\,G^{2,1}_{2,4}\left(s\,x\,\middle|\,{\beta+\lambda-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-k\atop m,-m,\beta+\mu,\beta-\mu}\right)\times\\&\quad\times\psi(x:\lambda,\mu:-\beta-\mu-m-1)\,dx,\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

provided $R(s)>0$, $R(1-\beta\pm m\pm\mu)>0$, *the generalized Laplace transform of* $t^{(\beta+\mu+m+1)}f\left(\frac{1}{t}\right)$ *exists and the integral in* (5.1) *converges absolutely.*

Proof. MEIJER has shown ([*15*], p. 188) that

$$W_{k,m}(\zeta)=\zeta^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\zeta}\int_0^{\infty}v^{-\beta-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}v}W_{\lambda,\mu}(v)\,G^{2,1}_{2,4}\left(\zeta\,v\,\middle|\,{\beta+\lambda-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-k\atop m,-m,\beta+\mu,\beta-\mu}\right)dv,$$

$$R(1-\beta\pm m\pm\mu)>0.$$

Replacing ζ by st, v by x/t in this and substituting for $W_{k,m}(st)$ in

$$\varphi(s:k,m)=s\int_0^{\infty}(st)^{m-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}st}W_{k,m}(st)\,f(t)\,dt,$$

we get

$$\varphi(s:k,m)=s^{m+1}\int_0^{\infty}t^{m}f(t)\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{t}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2t}}W_{\lambda,\mu}\left(\frac{x}{t}\right)G^{2,1}_{2,4}\left(s\,x\,\middle|\,{\beta+\lambda-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-k\atop m,-m,\beta+\mu,\beta-\mu}\right)\frac{dx}{t}\,dt.$$

Changing the order of integration, we get

$$\varphi(s:k,m) = s^{m+1}\int_0^\infty x^{-\beta-\frac{1}{2}}\, G^{2,1}_{2,4}\left(s\,x\,\middle|\,{\beta+\lambda-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-k \atop m,-m,\beta+\mu,\beta-\mu}\right)\int_0^\infty t^{m-\frac{1}{2}+\beta}\, e^{-\frac{x}{2t}}\, W_{\lambda,\mu}\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt\,dx.$$

Putting $t=\frac{1}{u}$, this gives the result.

The change in the order of integration is permissible by the application of DE LA VALLÉE POUSSIN'S Theorem ([16], p. 504), since the x-integral is absolutely and uniformly convergent if $R(s)>0$, $R(1-\beta\pm m\pm\mu)>0$; the t-integral is uniformly and absolutely convergent if the generalized Laplace transform of $t^{-(\beta-\mu-m-1)}f\left(\frac{1}{t}\right)$ exists and the repeated integral is absolutely convergent due to the absolute convergence of the integral in (5.1).

5.1. Corollaries.

(i) Putting $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$ and $\beta+\mu=-m-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-k$ we get:

If

$$W[f(t);k,m]=\varphi(s:k,m)$$

and

$$t^{\sigma}f\left(\frac{1}{t}\right)\div\psi(s:\sigma),$$

then

$$\varphi(s:1+m,m)=s^{m+1}\int_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}}\,Y_{2m}\left(2\sqrt{s\,x}\right)\psi(x:-\tfrac{1}{2})\,dx, \tag{5.2}$$

where $Y_\nu(x)$ is the Bessel function of the second kind, provided $R(s)>0$, $R(m)<\frac{3}{4}$, the Laplace transform of $t^{-\frac{1}{2}}f\left(\frac{1}{t}\right)$ exists and the integral in (5.2) is absolutely convergent.

(ii) Putting $k+m=\frac{1}{2}$, $\lambda=1$ and $\beta=-m$, we get:

If

$$f(t)\div\varphi(s)$$

and

$$W\left[t^{\sigma}f\left(\frac{1}{t}\right);\lambda,\mu\right]=\psi(s:\lambda,\mu:\sigma),$$

then

$$\varphi(s)=\sqrt{\pi s}\int_0^\infty x^{-(\mu+1)}\,J_\mu\left(\sqrt{s\,x}\right)J_{-\mu}\left(\sqrt{s\,x}\right)\psi(x:1,\mu:-\mu-1)\,dx, \tag{5.3}$$

provided $R(s)>0$, $R(1\pm\mu)>0$, the generalized Laplace transform of $\left|t^{-(\mu+1)}f\left(\frac{1}{t}\right)\right|$ exists and the integral in (5.3) is absolutely convergent.

5.2. Example.

If we take, in Theorem 3, $f(t)=t^{-\nu}e^{-\frac{1}{2}at}W_{l,n}(at)$, we get after a little simplification,

$$\int_0^\infty G^{2,1}_{2,4}\left(s\,x\,\middle|\,{-a_1,-b_5 \atop 0,-a_3,-b_1,-b_2}\right)G^{4,0}_{2,4}\left(a\,x\,\middle|\,{a_1,a_3 \atop b_1,b_2,b_3,b_4}\right)dx=s^{-1}\,G^{2,2}_{3,3}\left(\frac{a}{s}\,\middle|\,{0,a_3,a_2 \atop b_3,b_4,b_5}\right), \tag{5.4}$$

provided $R(a)>0$, $R(s)>0$, $R(b_3+1)>0$, $R(b_4+1)>0$, $R(b_3-a_3+1)>0$ and $R(b_4-a_3+1)>0$. This integral is a particular case of a known integral ([6], p. 422).

6. Theorem 4. *If*

$$W[f(t);k,m]=\varphi(s:k,m)$$

and

$$W\left[t^{\sigma}e^{-\frac{\alpha}{t}}f\left(\frac{1}{t}\right);\lambda,\mu\right]=\psi(s,\alpha:\lambda,\mu:\sigma),$$

then

$$(6.1)\qquad \left\{\begin{aligned}\varphi(s:k,m)=&\frac{s^{m+1}}{\Gamma_*(\frac{1}{2}-k\pm m)}\int_0^{\infty}x^{-(\beta+\mu+1)}\times\\&\times G_{2,4}^{2,2}\left(sx\,\middle|\,{\beta+\lambda-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+k\atop m,-m,\beta+\mu,\beta-\mu}\right)\psi(x,s:\lambda,\mu:-\beta-\mu-1-m)\,dx,\end{aligned}\right.$$

provided $R(s)>0$, $R(1-\beta\pm m\pm\mu)>0$, *the generalized Laplace transform of* $t^{-(\beta+\mu+1+m)}e^{-\frac{\alpha}{t}}f\left(\frac{1}{t}\right)$ *exists and the integral in* (6.1) *converges absolutely.*

The theorem follows on using ([15], p. 187)

$$W_{k,m}(\zeta)=\frac{\zeta^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\zeta}}{\Gamma_*(\frac{1}{2}-k\pm m)}\int_0^{\infty}v^{-\beta-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}v}W_{\lambda,\mu}(v)\,G_{2,4}^{2,2}\left(\zeta v\,\middle|\,{\beta+\lambda-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+k\atop m,-m,\beta+\mu,\beta-\mu}\right)dv,$$

$$R(1-\beta\pm m\pm\mu)>0,$$

and proceeding as in the proof of Theorem 3.

6.1. Corollary. Putting $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$ and $\beta+\mu=\delta$ in the theorem, we get: *If*

$$W[f(t);k,m]=\varphi(s:k,m)$$

and

$$t^{\sigma}e^{-\frac{\alpha}{t}}f\left(\frac{1}{t}\right)\div\psi(s,\alpha:\sigma),$$

then

$$(6.2)\quad \varphi(s:k,m)=\frac{s^{m+1}}{\Gamma_*(\frac{1}{2}-k\pm m)}\int_0^{\infty}x^{-\delta-1}G_{1,3}^{2,1}\left(sx\,\middle|\,{k+\frac{1}{2}\atop m,-m,\delta}\right)\psi(x,s:-\delta-m-1)\,dx,$$

provided $R(s)>0$, $R(1-\delta\pm m)>0$, *the Laplace transform of* $t^{-(\delta+m+1)}e^{-\frac{\alpha}{t}}f\left(\frac{1}{t}\right)$ *exists and the integral in* (6.2) *is absolutely convergent.*

6.2. Example. Let in the corollary of § 6.1, $f(t)=t^{\varrho+1}$, so that ([8], p. 146)

$$t^{\sigma}e^{-\frac{\alpha}{t}}f\left(\frac{1}{t}\right)=t^{\sigma-\varrho-1}e^{-\frac{\alpha}{t}}\div 2s\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}(\varrho-\sigma)}K_{\varrho-\sigma}\left(2\sqrt{\alpha s}\right)=\psi(s,\alpha:\sigma),$$

$$R(\alpha)>0\quad\text{and}\quad R(s)>0.$$

And ([7], p. 382)

$$q(s:k,m)=\frac{s^{-\varrho-1}\,\Gamma_*(\varrho+2+m\pm m)}{\Gamma(\varrho+5/2+m-k)},$$

$$R(s)>0 \quad \text{and} \quad R(\varrho+2+m\pm m)>0.$$

Using these in (6.2) and replacing $\delta+1+m+\varrho$ by ν and $-\delta+1+m+\varrho$ by 2μ, we get

$$\int_0^\infty x^\mu K_\nu\left(2\sqrt{sx}\right) G_{1,3}^{2,1}\left(sx\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}+k\\ m,-m,\frac{\nu}{2}-\lambda\end{matrix}\right) dx=\frac{\Gamma_*\left(\frac{1}{2}-k\pm m\right)\Gamma_*\left(\mu+\frac{\nu}{2}+1\pm m\right)}{2s^{\mu+1}\,\Gamma\left(\mu+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{2}-k\right)},$$

$$R(s)>0 \quad \text{and} \quad R\left(\mu+1\pm\frac{\nu}{2}\pm m\right)>0.$$

Further, putting $k=0$ and $\mu=\nu/2$, we get from this integral,

$$\int_0^\infty x^\mu K_{2\mu}\left(2\sqrt{sx}\right)\left[I_{-m}^2\left(\sqrt{sx}\right)-I_m^2\left(\sqrt{sx}\right)\right] dx=\frac{\sin(m\pi)\,\Gamma_*(2\mu+1\pm m)}{\sqrt{\pi}\,s^{\mu+1}\,\Gamma(2\mu+\frac{3}{2})},$$

$$R(\mu+\tfrac{1}{4})<0 \quad \text{and} \quad R(\mu+1\pm\mu\pm m)>0.$$

I wish to express my sincere thanks to Dr. S. K. Bose for his help and guidance in the preparation of this paper.

References

[1] Meijer, C. S.: Proc. Nederl. Akad. Wet., Amsterdam **43**, 599–608, 702–711 (1940). — [2] Meijer, C. S.: Proc. Nederl. Akad. Wet., Amsterdam **44**, 727–737 (1941). — [3] Boas, R. P.: Bull. Amer. Math. Soc. **48**, 286–294 (1942). — [4] Varma, R. S.: Current Sci. India **16**, 17–18 (1947). — [5] Varma, R. S.: Proc. Nat. Acad. Sci., India A **20**, 209–216 (1951). — [6] Bateman Project: Tables of Integral Transforms **2** (1954). — [7] Rathie, C. B.: Proc. Nat. Inst. Sci., India A **21**, 382–393 (1955). — [8] Bateman Project: Tables of Integral Transforms **1** (1954). — [9] Goldstein, S.: Proc. London Math. Soc., Ser. II **34**, 103–125 (1932). — [10] Rathie, C. B.: Proc. Nat. Acad. Sci., India A **22**, 65–74 (1953). — [11] Narain, R.: Some properties of generalized Laplace transform I. Rivista di Matematica **8** (1957). — [12] MacRobert, T. M.: Proc. Glasgow Math. Assoc. **1**, Pt. IV, 190–191 (1955). — [13] Rathie, C. B.: Proc. Nat. Acad. Sci., India A **21**, 231–249 (1952). — [14] Shastri, N. A.: Proc. Indian Acad. Sci. A **20**, 211–223 (1944). — [15] Meijer, C. S.: Proc. Nederl. Akad. Wet., Amsterdam **44**, 186–194 (1941). — [16] Bromwich, T. J. I'A.: The Theory of Infinite Series. (1932).

Department of Mathematics, University, Lucknow (India)

(Eingegangen am 10. Oktober 1956)

Stein, S. K.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 282/83 (1957)

A Continuous Mapping Defined by a Convex Curve

By
Sherman K. Stein

Let $B \subset E_2$[1]) be a convex curve with unique support line at each point and without linear segments; let K be the closure of the interior of B, and C the closure of the exterior of B (so $B = K \cap C$). Define $g\colon C \to E_2$ in the following manner. From $Q \in E_2 - K$ there are two tangents T_1, T_2 to C with points of contact P_1, P_2 respectively. The line through P_1, parallel to T_2, and the line through P_2, parallel to T_1, intersect in a point which shall be called $g(Q)$. For $Q \in C$ set $g(Q) = Q$. Observe that g is continuous.

Theorem. (a) *g is onto E_2,*

(b) *for $P \in K$, $g^{-1}(P)$ contains at least two points,*

(c) *there is at least one point $P \in K$ so that $g^{-1}(P)$ contains at least four points.*

Before proving this theorem we should point out that theorems equivalent to (a) and (b), usually stated for centrally-symmetric regions, can be found in the literature, for example in [1] to [4] and in some unpublished work of Andrew Sobczyk.

Proof of (a). Let $P \in E_2$. We wish to produce S such that $g(S) = P$. To do so, define $F\colon B \times B \to E_1$ by $F(Q, R) =$ area of triangle PQR. This function F, with compact domain $B \times B$, is continuous and hence there is at least one point (Q, R) where F assumes its maximum value. Let S be the intersection of the tangents at Q and R (it is not difficult to show that these tangents cannot be parallel). Then, as is shown by an elementary argument in [1], $g(S) = P$. Thus g is onto E_2.

Proof of (b). Let $P \in K$. If, in addition, $P \in B$, then $g(P) = P$ and $g(S) = P$, where S is the point produced in the proof of (a); it is obvious that S is distinct from P. Now assume that $P \in K - B$, and is chosen as the pole of a polar coordinate system. We define two functions of period 2π,

$$r\colon\ E_1 \to E_1 \quad \text{and} \quad p\colon\ E_1 \to E_1.$$

The function r describes B in polar coordinates. The function p is the support function of K. To be more precise, $p(t)$ is the distance p to the tangent, $T(t)$, to B, perpendicular to the ray of angle t (and located on the same side of P as the ray is).

If $\psi(t)$ is the angle from the ray of angle t to the tangent at the point $(r(t), t)$ then

$$\tan \psi(t) = r/r'.$$

---

[1]) E_n denotes n-dimensional Euclidean space.

If $\varphi(t)$ is the angle from the ray of angle t to the ray joining P to $T(t) \cap B$ then

$$\tan \varphi(t) = p'/p.$$

We wish to prove that there exist at least two values of t incongruent mod 2π such that $\psi(t) = \varphi(t + \pi/2) + \pi/2$.

Now the preceding equation is equivalent to the equation

$$\tan(\psi(t)) \cdot \tan \varphi(t + \pi/2) = -1.$$

Thus we are required to produce two values of t such that

$$\frac{r(t)}{r'(t)} \cdot \frac{p'(t + \pi/2)}{p(t + \pi/2)} = -1$$

or, equivalently

$$(*) \qquad r(t)\, p'(t + \pi/2) + r'(t)\, p(t + \pi/2) = 0.$$

To do this simply consider the function $A\colon E_1 \to E_1$ defined by $A(t) = r(t) \cdot p(t + \pi/2)$. The function A has at least one maximum and one minimum, say at t_1 and t_2, $0 \leqq t_1 < t_2 < 2\pi$. At these values of t condition $(*)$ holds. This proves (b).

Proof of (c). A point $P_0 \in K$ such that the associated function A has maxima at two values of t incongruent and 2π would also have at least two minima and hence $g^{-1}(P_0)$ would contain at least four points.

Assume that for each $P \in K$ the associated A has precisely one point of maximum, mod 2π, say at the argument $t(P)$. Now we define a continuous mapping $J\colon K \to B$ by $J(P) = (r(t(P)), t(P))$. This function J has no fixed points, in contradiction with Brouwer's fixed point theorem for the disk. Thus (c) is proved.

References

[1] Taylor, A. E.: A geometric theorem and its applications to biorthogonal systems. Bull. A.M.S. **53**, 614–616 (1947). — [2] Funk, P.: Über den Begriff „extremale Krümmung" und eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse. Math. Z. **3**, 87–92 (1919). — [3] Inzinger, R.: Sui diametric coniugati delle ovali a centro. Atti. Rend. Acc. Naz. dei Lincei **1947**, 293–295. — [4] Laugwitz, Detlef: Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume. Math. Z. **61**, 235–244 (1954).

Dept. of Math., Univ. of California, Davis, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 11. April 1957)

CARLITZ, L.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 284—289 (1957)

The bilinear Generating Funktion for Hermite Polynomials in Several Variables

By
L. CARLITZ

1. BURCHNALL [2] used the formula

$$(D-2x)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \binom{n}{r} H_{n-r}(x) \cdot D_r, \tag{1}$$

where $D = d/dx$ and

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n,$$

to give an elegant proof of the identity (due to NIELSEN [6; p. 31])

$$H_{m+n}(x) = \sum_{r=0}^{\min(m,n)} (-1)^r \binom{m}{r} \binom{n}{r} 2^r r!\, H_{m-r}(x)\, H_{n-r}(x). \tag{2}$$

It may be of interest to point out that (1) can also be used to give an elementary proof of MEHLER's formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\, H_n(y)}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{\frac{2xyz-(x^2+y^2)z^2}{1-z^2}\right\}; \tag{3}$$

for other proofs of (3) see for example [7].

Indeed if $F = F(x, y, z)$ stands for the right member of (3) and $D_x = \partial/\partial x$, $D_y = \partial/\partial y$, it is easily verified that

$$(D_x - 2x)F = \frac{2yz-2x}{1-z^2} F, \qquad (D_y - 2y)F = \frac{2xz-2y}{1-z^2} F,$$

$$(D_x - 2x)(D_y - 2y)F = \left\{\frac{(2yz-2x)(2xz-2y)}{(1-z^2)^2} + \frac{2z}{1-z^2}\right\} F. \tag{4}$$

On the other hand we find that

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \left\{2\frac{(x-yz)(y-xz)}{(1-z^2)^2} + \frac{z}{1-z^2}\right\} F. \tag{5}$$

Comparing (4) and (5) we get

$$2\frac{\partial F}{\partial z} = (D_x - 2x)(D_y - 2y)F. \tag{6}$$

If now we put

$$F(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, y) \frac{z^n}{n!} \qquad (A_0(x, y) = 1),$$

it is evident that (6) implies

$$2A_n(x,y) = (D_x - 2x)(D_y - 2y)A_{n-1}(x,y);$$

since the operators $D_x - 2x$, $D_y - 2y$ commute, this yields

$$2^n A_n(x,y) = (D_x - 2x)^n (D_y - 2y)^n \cdot 1.$$

Using (1) we have at once

$$2^n A_n(x,y) = H_n(x) H_n(y),$$

which evidently proves (3).

2. If we put

$$\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

a non-singular quadratic form, then, following APPELL and KAMPÉ DE FÉRIET [1]

$$e^{\xi_1 t_1 + \cdots + \xi_n t_n - \frac{1}{2}\varphi(t)} = \sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}}{m_1! \cdots m_n!} H_{m_1 \cdots m_n}(x_1, \ldots, x_n), \tag{7}$$

where

$$\xi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = \sum_j a_{ij} x_j. \tag{8}$$

ERDÉLYI [3] has proved the following extension of MEHLER's formula (see KOSCHMIEDER [4] for $n=2$):

$$\left\{ \sum_{m_i=0} \frac{t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}}{m_1! \cdots m_n!} H_{m_1 \cdots m_n}(x_1, \ldots, x_n) H_{m_1 \cdots m_n}(y_1, \ldots, y_n) \right. \tag{9}$$

$$\left. = \frac{1}{t_1 \cdots t_n (\Delta_1 \Delta_2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ \frac{1}{4}\psi_1(\xi + \eta) - \frac{1}{4}\psi_2(\xi - \eta) \right\} \right\},$$

where

$$\varphi_1(x) = \sum_1^n \frac{x_i^2}{t_i} + \varphi(x), \qquad \varphi_2(x) = \sum_1^\infty \frac{x_i^2}{t} - \varphi(x), \tag{10}$$

Δ_1, Δ_2 are the discriminants of φ_1, φ_2, respectively and $\psi_1(x), \psi_2(x)$ denote the quadratic forms inverse to φ_1 and φ_2; ξ_i is defined by (8) and

$$\eta_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} = \sum a_{ij} y_j. \tag{11}$$

We now prove (9) by the method used above in proving (3). In the first place it follows readily from (7) that

$$E_i H_{m_1 \cdots m_n}(x_1, \ldots, x_n) = (\xi_i - D_{x_i}) H_{m_1 \cdots m_n}(x_1, \ldots, x_n), \tag{12}$$

where $D_{x_i} = \partial/\partial x_i$ and the left member denotes the H polynomial with m_i replaced by $m_i + 1$.

Put

$$\psi_1(x) = \sum_{i,j} \beta_{ij} x_i x_j, \qquad \psi_2(x) = \sum_{ij} \gamma_{ij} x_i x_j,$$

so that, in view of (10),

$$\sum_j \Big(\frac{\delta_{ij}}{t_i} + a_{ij}\Big)\beta_{jk} = \delta_{ik} = \sum_j \Big(\frac{\delta_{ij}}{t_i} - a_{ij}\Big)\gamma_{jk},$$

which gives

$$(13) \qquad \sum_j a_{ij}\beta_{jk} = \delta_{ik} - \frac{1}{t_i}\beta_{ik}, \qquad \sum_j a_{ij}\gamma_{jk} = -\delta_{ik} + \frac{1}{t_i}\gamma_{ik}.$$

If we put

$$F = \tfrac{1}{4}\psi_1(\xi+\eta) - \tfrac{1}{4}\psi_2(\xi-\eta),$$

it is easily verified that

$$(14) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \xi_i - \frac{1}{2t_i}(X_i + Y_i + X_i' - Y_i'),$$

$$(15) \qquad \frac{\partial F}{\partial y_i} = \eta_i - \frac{1}{2t_i}(X_i + Y_i - X_i' + Y_i'),$$

where

$$(16) \quad X_i = \sum_k \beta_{ik}\xi_k, \qquad Y_i = \sum_k \beta_{ik}\eta_k, \qquad X_i' = \sum_k \gamma_{ik}x_k, \qquad Y_i' = \sum_k \gamma_{ik}y_k.$$

We have also from (14) or (15)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial y_i} = a_{ii} - \frac{1}{2t_i}\sum_k (\beta_{ik}a_{ki} - \gamma_{ik}a_{ki}).$$

Using (13) this reduces to

$$(17) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial y_i} = a_{ii} - \frac{1}{t_i} + \frac{\beta_{ii}+\gamma_{ii}}{2t_i^2}.$$

If Φ denotes the right member of (9), it follows from (14), (15), (17) that

$$(18) \qquad (D_{x_i} - \xi_i)(D_{y_i} - \eta_i)\Phi = \left\{ \frac{(X_i+Y_i)^2 - (X_i'-Y_i')^2}{+t_i^2} - \frac{1}{t_i} + \frac{\beta_{ii}+\gamma_{ii}}{2t_i^2} \right\}\Phi.$$

To compute $\partial\Phi/\partial t_r$ we need $\partial\beta_{ij}/\partial t_r$ and $\partial\gamma_{ij}/t_k$. Using (13) we find that

$$(19) \qquad \frac{\partial\beta_{ij}}{\partial t_k} = \frac{\beta_{ik}\beta_{jk}}{t_k^2}, \qquad \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t_k} = \frac{\gamma_{ik}\gamma_{jk}}{t_k^2}.$$

We have also

$$(20) \qquad \frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial\Delta_1}{\partial t_k} = -\frac{\beta_{kk}}{t_k^2}, \qquad \frac{1}{\Delta_2}\frac{\partial\Delta_2}{\partial t_k} = -\frac{\gamma_{kk}}{t_k^2}.$$

Now employing (19) and (16) we get

$$(21) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t_k} = \left\{ \frac{(X_k+Y_k)^2 - (X_k'-Y_k')^2}{4t_k^2} - \frac{1}{t_k} + \frac{\beta_{kk}+\gamma_{kk}}{2t_k^2} \right\}\Phi.$$

Comparing (21) with (18) we see that

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_k} = (D_{x_k} - \xi_k)(D_{y_k} - \eta_k)\Phi. \tag{22}$$

If we put

$$\Phi = \sum_{m_i=0}^{\infty} A_{m_1 \dots m_n} \frac{t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!},$$

clearly (22) implies

$$E_i A_{m_1 \dots m_n} = (D_{x_i} - \xi_i)(D_{y_i} - \eta_i) A_{m_1 \dots m_n}, \tag{23}$$

where E_i has the same meaning as in (12). The operators $D_{x_i} - \xi_i$ and $D_{y_j} - \eta_j$ obviously commute; the same is also true of $D_{x_i} - \xi_i$ and $D_{x_j} - \eta_j$ as well as of $D_{y_i} - \eta_i$ and $D_{y_j} - \eta_j$. Thus repeated use of (23) yields

$$A_{m_1 \dots m_n} = \prod_{i=1}^{n} (D_{x_i} - \xi_i)^{m_i} \cdot \prod_{j=1}^{n} (D_{y_j} - \eta_j)^{m_j} \cdot 1.$$

But by (12)

$$H_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{m_1 + \dots + m_n} \prod_{i=1}^{n} (D_{x_i} - \xi_i) \cdot 1. \tag{24}$$

Hence we get

$$A_{m_1 \dots m_n} = H_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n) H_{m_1 \dots m_n}(y_1, \dots, y_n),$$

which evidently completes the proof of (9).

Incidentally by means of (12) we can prove that

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} (D_{x_i} - \xi_i)^{m_i} = \sum_{r_i=0}^{m_i} (-1)^{m_1 + \dots + m_n - r_1 - \dots - r_n} \binom{m_1}{r_1} \dots \binom{m_n}{r_n} \times \right. \tag{25}$$
$$\left. \times H_{m_1 - r_1, \dots, m_n - r_n}(x_1, \dots, x_n) D_{x_1}^{r_1} \dots D_{x_n}^{r_n}, \right.$$

which in particular contains (24). Using (25) we can obtain a generalization of (2). Indeed (12) and (25) imply

$$\left\{ H_{m_1 + p_1, \dots, m_n + p_n}(x_1, \dots, x_n) \right. \tag{26}$$
$$= \sum_{r_i=0}^{m_i} (-1)^{r_1 + \dots + r_n} \binom{m_1}{r_1} \dots \binom{m_n}{r_n} H_{m_1 - r, \dots, m_n - r_n}(x_1, \dots, x_n) \times$$
$$\left. \times D_{x_1}^{r_1} \dots D_{x_n}^{r_n} H_{p_1 \dots p_n}(x_1, \dots, x_n). \right.$$

Using (7) we get

$$D_{x_i} H_{p_1 \dots p_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_j a_{ij} p_j E_j^{-1} H_{p_1 \dots p_n}(x_1, \dots, x_n)$$

so that

$$D_{x_1}^{r_1} \dots D_{x_n}^{r_n} H_{p_1 \dots p_n}(x_1, \dots, x_n)$$

can be expressed as a linear combination of H's. However, the resulting form of (26) seems too complicated to be of interest.

3. Closely related to the polynomials H is a second set of polynomials defined by

$$\sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{t_1^{m_1}\dots t_n^{m_n}}{m_1!\dots m_n!} G_{m_1\dots m_n}(x_1,\dots,x_n) = e^{x_1t_1+\cdots+x_nt_n-\frac{1}{2}\psi(t)} \tag{27}$$

where $\psi(t)$ denotes the quadratic form inverse to $\varphi(t)$. From (27) we get

$$E_i G_{m_1\dots m_n}(x_1,\dots,x_n) = (x_i - D_{\xi_i})\, G_{m_1\dots m_n}(x_1,\dots,x_n), \tag{28}$$

analogous to (12). This formula yields

$$\left\{\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} (x_i - D_{\xi_i})^{m_i} = \sum_{r_i=0}^{m_i} (-1)^{r_1+\cdots+r_n} \binom{m_1}{r_1}\dots\binom{m_n}{r_n} \times \\ \times G_{m_1-r_1,\dots,m_n-r_n}(x_1,\dots,x_n)\, D_{\xi_1}^{r_1}\dots D_{\xi_n}^{r_n} \end{aligned}\right. \tag{29}$$

and in particular

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i - D_{\xi_i})^{m_1}\cdot 1 = G_{m_1\dots m_n}(x_1,\dots,x_n); \tag{30}$$

(29) and (30) may be compared with (25) and (26). Here again by means of (29) we get a complicated generalization of (2) which we shall not state. However, we may note the following results:

$$\left\{\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{n} (\xi_i - D_{x_i})^{m_i}\cdot G_{p_1\dots p_n}(x_1,\dots,x_n) \\ &\quad = \sum_{r_i=0}^{m_i} (-1)^{r_1+\cdots+r_n} \binom{m_1}{r_1}\dots\binom{m_n}{r_n}\binom{p_1}{r_1}\dots\binom{p_n}{r_n} r_1!\dots r_n! \times \\ &\qquad \times H_{m_1-r_1,\dots,m_n-r_n}(x_1,\dots,x_n)\, G_{p_1-r_1,\dots,p_n-r_n}(x_1,\dots,x_n), \end{aligned}\right. \tag{31}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{n} (x_i - D_{\xi_i})^{m_i}\cdot H_{p_1\dots p_n}(x_1,\dots,x_n) \\ &\quad = \sum_{r_i=0}^{m_i} (-1)^{r_1+\cdots+r_n} \binom{m_1}{r_1}\dots\binom{m_n}{r_n}\binom{p_1}{r_1}\dots\binom{p_n}{r_n} r_1!\dots r_n! \times \\ &\qquad \times G_{m_1-r_1,\dots,m_n-r_n}(x_1,\dots,x_n)\, H_{p_1-r_1,\dots,p_n-r_n}(x_1,\dots,x_n). \end{aligned}\right. \tag{32}$$

The inverses of (31) and (32) are readily obtained. Note also that (31) and (32) imply

$$\prod_{1}^{n} (\xi_i - D_{x_i})^{m_1}\cdot G_{p_1\dots p_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1}^{n} (x_i - D_{\xi_i})^{p_i}\cdot H_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n). \tag{33}$$

By means of (28) we can also obtain the analog of (9) involving the G's. However, we shall not take the space to state the result. More interesting is the following mixed formula proved by ERDÉLYI [3] for general n and by KOSCHMIEDER [5] for $n=2$.

Let

$$\Phi(w) = \sum_{r=1}^{n} \frac{u_r^2 + v_r^2}{t_r} + \frac{1}{2}\varphi(u+iv) + \frac{1}{2}\psi(u-iv),$$

a quadratic form in the $2n$ indeterminates

$$w_1 = u_1, \ldots, w_n = u_n, \qquad w_{n+1} = v_1, \ldots, w_{2n} = v_n;$$

let Δ' denote the discriminant of Φ and $\Psi(w)$ the inverse form. Also put

$$z_1 = \xi_1 + y_1, \ldots, z_n = \xi_n + y_n, \qquad z_{n+1} = i(\xi_1 - y_1), \ldots, z_{2n} = i(\xi_n - y_n).$$

Then we have

$$(34) \qquad \left\{ \sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{t_1^{m_1} \ldots t_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} H_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n)\, G_{m_1, \ldots, m_n}(y_1, \ldots, y_n) \right.$$
$$\left. = \frac{1}{t_1 \ldots t_n \Delta'^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{\frac{1}{4}\Psi(z)\right\}. \right.$$

Let W denote the right member of (34). Then as in the proof of (9), we can show that

$$\frac{\partial W}{\partial t_k} = (D_{x_k} - \xi_k)(D_{\eta_k} - y_k)\Phi.$$

Using (24) and (30) we at once get (34).

References

[1] Appell, P., and J. Kampé de Fériet: Fonctions hypergeometriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite. Paris 1926. — [2] Burchnall, J. L.: A note on the polynomials of Hermite. Quarterly J. Math. (Oxford) **12**, 9—11 (1941). — [3] Erdélyi, A.: Über eine erzeugende Funktion von Produkten Hermitescher Polynome. Math. Z. **44**, 201—211 (1939). — [4] Koschmieder, L.: Erzeugende der Hermiteschen Polynome, deren Grundgebiet die Ebene ist. Math. Z. **43**, 248—254 (1937). — [5] Koschmieder, L.: Ein Ausdruck, der die Hermiteschen Polynome der Ebene und die zu ihnen biorthogonalen auf einmal erzeugt. Math. Z. **43**, 783—792 (1938). — [6] Nielsen, N.: Recherches sur les polynomes d'Hermite. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Meddelelser (I) **6**, 1—78 (1918). — [7] Watson, G. N.: Notes on generating functions of polynomials: (2) Hermite polynomials. J. London Math. Soc. **8**, 194—199 (1933).

Dept. of Math., Duke University, Durham, N.C. (U.S.A.)

(Eingegangen am 19. April 1957)

McCarthy, P. J.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 290–295 (1957)

On Indefinite Ternary Genera of One Class

By
Paul J. McCarthy

1. Introduction. Let f be a ternary quadratic form whose matrix A has integral elements. The determinant of A is called the determinant of f, is denoted by $|f|$, and is assumed to be non-zero. Let J be the g.c.d. of all the 2-rowed minor determinants of A, and let the integer K be determined by $|f| = J^2K$. J and K are invariants of f under integral unimodular transformations. f is called primitive if the g.c.d. of all the elements of A is 1. If f is primitive, it is called properly primitive if not all the diagonal elements of A are even. Otherwise it is called improperly primitive. All the forms considered in this paper will be primitive forms.

The form F, whose (integral) matrix is $J^{-1}|f|A^I$, is called the reciprocal form of f. F is a primitive form. The g.c.d. of all the 2-rowed minor determinants of F is K, and $|F| = K^2J$.

f and a second form g are said to be equivalent, or in the same class, when they can be transformed into one another by integral unimodular transformations. f and g are said to be in the same genus when they can be transformed into one another by rational transformations, of determinant 1, and with elements whose denominators are prime to $2|f|$. The genus of f can also be described in terms of certain quadratic characters, and for this description the reader is referred to Chapter IV of [1]. The genus of f consists of a finite number of classes of forms, and the number of these classes is called the class number of the genus.

In the case when f is an indefinite form, A. Meyer obtained in [7] certain sufficient conditions for the genus of f to contain only one class. Out of these conditions he obtained the following fundamental result.

Theorem 1 (Meyer). *An indefinite ternary quadratic form f is in a genus of one class if $(J, K) = 1$ or 2 and $J \not\equiv 0 \not\equiv K \pmod 4$.*

Serious doubts have been raised concerning Meyer's proof of this theorem (see, for example, Sec. 1 of [4]). A proof was recently given by Jones and Marsh [4].

In this paper we shall obtain certain other sets of sufficient conditions for the genus of f to contain only one class. These results are obtained by a type of reduction process which is described in the next section. They include extensions of some results of Jones [3] (see Theorems 3 and 4). Some of these results are certainly contained in the theorems of Meyer's paper, but again we have the difficulties with proofs. Therefore, it seems not out of place to present these theorems with the proofs we have devised.

The solution of the more general problem of determining the class number of the genera of indefinite ternary forms was the object of several papers by MEYER in the last decade of the last century. He treated only forms with odd determinant. This problem was again attacked recently by JONES and WATSON [6], and they obtained some very general results. They have given the class number of the genus in terms of the index of a subgroup of a certain group associated with the genus. However, in case J and K are known, we are left with the difficult task of determining this index.

2. The N-related form of f. Let $M = JK$ if both f and its reciprocal form are properly primitive. Otherwise, let M be the product of the odd parts of J and K. Let k be a large natural number which we hold fixed throughout the following discussion. Then there is a form f_0, equivalent to f, such that

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} f_0 \equiv a x^2 + b J K y^2 + c J z^2 \\ F_0 \equiv b c J K x^2 + a c y^2 + a b K z^2 \\ a b c \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{M^k},$$

where F_0 is the reciprocal form of f_0 ([8], p. 460).

Let N be a factor of J which divides M. Write $N = r^2 s$, where s is squarefree. Define a new form g, with matrix B, by setting

$$B = N^{-1} P A_0 P,$$

where A_0 is the matrix of f_0, and

$$P = \begin{pmatrix} rs & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We call this form g the N-related form of f.

If p is a prime, and t is any integer, we denote by $(t)_p$ the exponent of p in the prime decomposition of t.

Let J' be the g.c.d. of all the 2-rowed minor determinants of B, and let K' be determined by $|g| = J'^2 K'$. If p is a prime not dividing N, it is clear that $(J')_p = (J)_p$ and $(K')_p = (K)_p$. Let p be a prime dividing N. If B_{ij} is the minor of the element b_{ij} of B, then $(J')_p$ is the minimum of the exponents of p in the prime decompositions of

$$\left.\begin{array}{l} B_{11} \equiv N^{-2} b c J^2 K \\ B_{22} \equiv r^{-2} a c J \\ B_{33} \equiv r^{-2} a b J K \end{array}\right\} \pmod{M^{k-1}}.$$

Hence

$$(J')_p = \min\left((J)_p - 2(r)_p,\ 2(J)_p + (K)_p - 4(r)_p - 2(s)_p\right).$$

Then, since $|f| = r^4 s |g|$,

$$(K')_p = 2(J)_p + (K)_p - 4(r)_p - (s)_p - 2(J')_p.$$

Let us assume that f and its reciprocal form F are both properly primitive when either J or K is divisible by 4, and that s and $N^{-1}J$ are relatively prime. With these assumptions, it is a simple task to show that the genus of g is completely determined by the genus of f. We shall express the generic characters $(g|p)$ of g in terms of the generic characters of f.

If p is an odd prime dividing J but not s, then $(g|p) = (s|p)(f|p)$. If p is an odd prime dividing K, then $(G|p) = (F|p)$, where G is the reciprocal form of g. Now let p be an odd prime dividing s such that $(J')_p \not\equiv 0$. Then p must divide K, and we have $(g|p) = (cN^{-1}J|p) = (f|p)(F|p)(N^{-1}J|p)$. In a similar way it can be shown that the generic characters of g with respect to 4 and 8, when they exist, can be expressed in terms of the generic characters of f with respect to 4 and 8.

Note that under the assumptions we have made, g is primitive, and is properly or improperly primitive according as f is properly or improperly primitive.

Theorem 2. *Let f and its reciprocal form F be properly primitive when either J or K is divisible by 4, and let s and $N^{-1}J$ be relatively prime. If the N-related form g of f is in a genus of one class, then f is in a genus of one class if*

$$g(x, y, z) \equiv s\,a \pmod{M^{k-1}}$$

implies $y \equiv z \equiv 0 \pmod{rs}$.

Proof. Let f_1 be in the same genus as f. We may assume that $f_1 \equiv f_0 \pmod{(2M)^k}$ ([2], p. 107). Let A_1 be the matrix of f_1, and g_1 the form with matrix $B_1 = N^{-1}P^T A_1 P$. g_1 is the N-related form of f_1. Since f_1 and f are in the same genus, g_1 and g are in the same genus. Then by the hypothesis of the theorem, g_1 and g are equivalent, so there is a unimodular transformation with matrix $U = [u_{ij}]$ taking g into g_1. The transformation with matrix

$$PUP^I = \begin{pmatrix} u_{11} & rs\,u_{12} & rs\,u_{13} \\ (rs)^{-1}u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ (rs)^{-1}u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

takes f_0 into f. But $g(u_{11}, u_{21}, u_{31}) \equiv s\,a \pmod{M^{k-1}}$, and therefore $u_{21} \equiv u_{31} \equiv 0 \pmod{rs}$. Thus PUP^I is an integral matrix, and f and f_1 are equivalent.

N-related forms, with N a prime, were used by JONES in [3]. Theorem 2 was suggested by, and contains, a theorem in [5]. Note that in Theorem 2, f may be definite or indefinite.

3. Forms for which 3 divides J and K.

Theorem 3. *An indefinite ternary quadratic form f is in a genus of one class if* (i) (J, K) *divides* 6, (ii) $J \not\equiv 0 \not\equiv K \pmod 4$, (iii) $|f| \not\equiv 0 \pmod{81}$, *and* (iv) $c_3(f) = 1$.

$c_3(f)$ is the Hasse invariant of f with respect to 3. An exposition of the properties of this invariant may be found in [2].

Remark. Two forms f and g are said to be in the same order if they have the same index, have the same invariants J and K, if both f and g are properly primitive or both are improperly primitive, and finally if their reciprocal forms are both properly primitive or both improperly primitive. Theorem 1, and also Theorems 5 and 6, state that every genus in certain orders contain only one class. Theorem 3 singles out certain genera in certain orders which contain only one class. This is the function of the condition (iv). It may happen, however, that $c_3(f) = 1$ for every form in an order of forms.

Proof of Theorem 3. If $(J, K) = 1$ or 2, the theorem is an immediate consequence of Theorem 1. So we assume that $(J, K) = 3$ or 6. Let $r = 1$ and $s = 3$, and let g be the 3-related form of f. From (iii) we have $(J)_3 = (K)_3 = 1$, hence $(J')_3 = 1$ and $(K')_3 = 0$. Also $(3, J/3) = 1$. Thus g satisfies the hypothesis of Theorem 1, and so is in a genus of one class.

Now suppose that

$$g(x, y, z) \equiv 3ax^2 + (bJK/3)y^2 + (cJ/3)z^2 \equiv 3a \pmod{27}.$$

Then $z \equiv 0 \pmod 3$, and so

$$(bJK/9)y^2 \equiv a(1 - x^2) \pmod 3.$$

If $x \equiv 1$ or $2 \pmod 3$, then $y \equiv 0 \pmod 3$. We shall show that we cannot have $x \equiv 0 \pmod 3$. If we were to have $x \equiv 0 \pmod 3$, we would have

$$(bJK/9)y^2 \equiv a \pmod 3,$$

which implies that $(abJK/9 \mid 3) = 1$. Then, using this fact, we obtain from ([2], p. 27 and p. 35),

$$c_3(f) = (-abJK, -bcJ^2K)_3 = (-abJK/9 \mid 3) = -1,$$

which contradicts (iv). The theorem now follows from Theorem 2.

The proof of the following theorem is similar to that of Theorem 3.

Theorem 4. *A positive ternary quadratic form f is in a genus of one class if 3 divides J and K, $|f| \not\equiv 0 \pmod{81}$, $c_3(f) = 1$ and the 3-related form of f is in a genus of one class.*

4. Forms for which 4 divides J and K.

Theorem 5. *An indefinite ternary quadratic form f is in a genus of one class if* (i) $J \equiv 8 \pmod{16}$ *and* $K \equiv 2 \pmod 4$, *and* (ii) $(J, K) = 2$.

Proof. Let $r = 2$ and $s = 1$, and let g be the 4-related form of f. Then $(J')_2 = 1$ and $(K')_2 = 1$. Hence g satisfies the hypothesis of Theorem 1 and so is in a genus of one class. Now suppose that

$$g(x, y, z) \equiv ax^2 + (bJK/4)y^2 + (cJ/4)z^2 \equiv a \pmod 8.$$

(Note that in this case, and in the proofs of Theorems 6, 7 and 8, abc is odd.) Then $x^2 \equiv 1 \pmod 2$, so $x^2 \equiv 1 \pmod 8$. Hence

$$(b\,J\,K/8)\,y^2 + (c\,J/8)\,z^2 \equiv 0 \pmod 4.$$

But this clearly implies $y \equiv z \equiv 0 \pmod 2$, and so all is proved.

Theorem 6. *An indefinite ternary quadratic form f is in a genus of one class if* (i) $J \equiv 2 \pmod 4$ *and* $K \equiv 4 \pmod 8$, *and* (ii) $(J, K) = 2$.

Proof. From the hypothesis of this theorem it follows easily that the coefficient a of the form on the right-hand side of the congruence (1) may be taken to represent either odd residue class modulo 4.

Let $r = 1$ and $s = 2$, and let g be the 2-related form of f. Then $(J')_2 = (K')_2 = 1$. Hence g satisfies the hypothesis of Theorem 1, and so is in a genus of one class. Now suppose that

$$g(x, y, z) \equiv 2a\,x^2 + (b\,J\,K/2)\,y^2 + (c\,J/2)\,z^2 \equiv 2a \pmod{16}.$$

Then z is even. Writing $z = 2z'$ we then have

$$a\,x^2 + (b\,J\,K/4)\,y^2 + c\,J\,z'^2 \equiv a \pmod 8.$$

Then $x^2 \equiv 1 \pmod 2$, so $x^2 \equiv 1 \pmod 8$. Hence

$$(b\,J\,K/8)\,y^2 + (c\,J/2)\,z'^2 \equiv 0 \pmod 4.$$

Now let $K/4 \equiv t \pmod 4$, where $t = 1$ or 3. Then we may assume that $a \equiv t \pmod 4$. Since $abc \equiv 1 \pmod 4$, we have $bc \equiv t \pmod 4$. Hence

$$b\,c\,J^2K/16 \equiv b\,c\,K/4 \equiv 1 \pmod 4.$$

But this implies $y \equiv z' \equiv 0 \pmod 2$, and the proof is complete.

Theorem 7. *An indefinite ternary quadratic form f, with properly primitive reciprocal form, is in a genus of one class if* (i) $J \equiv 8 \pmod{16}$ *and K is odd*, (ii) $(J, K) = 1$, *and* (iii) $(-1)^{(J-1)/2} = (-1)^{(K-1)/2}$.

Proof. Let $r = 2$ and $s = 1$, and let g be the 4-related form of f. Then $(J')_2 = 1$ and $(K')_2 = 0$. Hence g satisfies the hypothesis of Theorem 1, and so is in a genus of one class. Now suppose that

$$g(x, y, z) \equiv a\,x^2 + (b\,J\,K/4)\,y^2 + (c\,J/4)\,z^2 \equiv a \pmod 8.$$

Then $x^2 \equiv 1 \pmod 2$, so $x^2 \equiv 1 \pmod 8$. Hence

$$(b\,J\,K/8)\,y^2 + (c\,J/8)\,z^2 \equiv 0 \pmod 4.$$

By (iii), a and K, and so bc and K, represent the same odd residue class modulo 4. Hence

$$b\,c\,J^2K/64 \equiv b\,c\,K \equiv 1 \pmod 4.$$

But this implies that $y \equiv z \equiv 0 \pmod 2$, and the theorem is proved.

Theorem 8. *An indefinite ternary quadratic form f is in a genus of one class if* (i) $J \equiv 4 \pmod 8$ *and K is odd*, (ii) $(J, K) = 1$, (iii) $(-1)^{(J-1)/2} = (-1)^{(K-1)/2}$, *and* (iv) *the congruence* $F \equiv -J/4 \pmod 4$ *is solvable.*

Proof. Let $r = 2$ and $s = 1$, and let g be the 4-related form of f. Then $(J')_2 = (K')_2 = 0$. Hence g satisfies the hypothesis of Theorem 1, and so is in a genus of one class. Now suppose that

$$g(x, y, z) \equiv a x^2 + (b J K/4) y^2 + (c J/4) z^2 \equiv a \pmod 8.$$

If x is odd, then

$$(b J K/4) y^2 + (c J/4) z^2 \equiv 0 \pmod 4.$$

But

$$b c J^2 K/16 \equiv b c K \equiv a K \equiv 1 \pmod 4,$$

by (iii), so $y \equiv z \equiv 0 \pmod 2$.

Now assume that x is even. If y is even and z is odd, then

$$a c \equiv J/4 \pmod 4.$$

If z is even and y is odd, then

$$a b \equiv J K/4 \pmod 4.$$

But $a c J/4 \equiv a b J K/4 \pmod 4$ by (iii), so one of these congruences holds if and only if the other one does. However, by (iv) we may assume that $a c \equiv -J/4 \pmod 4$. Hence it is impossible that x be even. This proves the theorem.

The proof of the following theorem is similar to the proof of Theorem 3.

Theorem 9. *Theorems* 5, 6, 7 *and* 8 *remain true if* (J, K) *has the additional factor* 3, *if* $|f| \not\equiv 0 \pmod{81}$ *and* $c_3(f) = 1$.

References

[1] Dickson, L. E.: Studies in the Theory of Numbers. Chicago University Press 1930. — [2] Jones, B. W.: The Arithmetic Theory of Quadratic Forms. (Carus Monograph No. 10, 1950.) — [3] Jones, B. W.: An extension of Meyer's theorem on indefinite ternary quadratic forms. Can. J. Math. **4**, 120—128 (1952). — Correction. Can. J. Math. **5**, 271—272 (1953). — [4] Jones, B. W., and D. C. B. Marsh: A proof of a theorem of Meyer on indefinite ternary quadratic forms. Amer. J. Math. **77**, 513—525 (1955). — [5] Jones, B. W., and G. Pall: Regular and semi-regular positive ternary quadratic forms. Acta Math. **70**, 165—191 (1938). — [6] Jones, B. W., and G. L. Watson: On indefinite ternary quadratic forms. Can. J. Math. **8**, 592—608 (1956). — [7] Meyer, A.: Zur Theorie der indefiniten ternären quadratischen Formen. J. für Math. **108**, 125—139 (1891). — [8] Smith, H. J. S.: Collected Mathematical Papers, vol. I. Oxford 1894.

Dept. of Math., Florida State Univ., Tallahassee, Fla. (U.S.A.)

(Eingegangen am 10. Mai 1957)

Boas jr., R. P.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 296—298 (1957)

Growth of Derivatives of Entire Functions *)

By
R. P. Boas, jr.

If $f(z)$ is analytic and of exponential type for $x>0$ it is known that if $f(x)$ approaches a limit as $x\to\infty$ along the positive real axis then $f'(x)\to 0$ along the positive real axis [2], [4], [6]. Gaier has asked whether this is a best possible result in the sense that exponential type cannot be replaced by the condition $\log M(r)=O\{r\mu(r)\}$ with any $\mu(r)$ which tends to ∞ [$M(r)$ is the maximum modulus of f]. A positive answer has the consequence that change of index in a Borel-summable series $\sum a_n$ is not in general permissible unless $a_n=O(K^n)$ for some positive K. Gaier has shown [5] that exponential type cannot be replaced by growth of any order exceeding 1. Here I shall answer Gaier's question affirmatively in general. The idea of the construction was suggested in conversation by the late A. C. Schaeffer.

It is natural to ask what can be said about the growth of $f'(x)$ in general when $f(x)$ is an entire function and $f(x)$ is bounded (or approaches a limit). This question (in a more general form) was answered by Delange and Gaier [2]. (A less general theorem of the same nature is given by Dzhrbashyan [3].) As a special case, we note that if f is of finite order, at least $\frac{1}{2}$, with Lindelöf proximate order $\varrho(r)$ [1, pp. 54ff.], then $f(x)=O(1)$ or $o(1)$ as $x\to+\infty$ implies $f'(x)=O(x^{\varrho(x)-1})$ or $o(x^{\varrho(x)-1})$, respectively. [If f is of order less than $\frac{1}{2}$, $f(x)=O(1)$ implies that f is a constant.]

Theorem. *Let $\mu(x)$ be defined for positive x, $\mu(x)\geqq 2\pi$, unbounded, increasing, and continuously differentiable, with $\mu'(x)\searrow 0$ and $\mu'(x)=o(1/x)$. Then there is an entire function $f(z)$ such that $\log|f(z)|=O\{|z|\,\mu(|z|)\}$, $f(x)\to 0$ as $x\to\infty$ through positive real values, and $f'(x)$ is unbounded.*

It is convenient to introduce an unbounded non-decreasing function $\lambda(x)$ such that $1\leqq\lambda(x)\leqq\frac{1}{2}\mu(x)$, and $\lambda(n)/\pi$ is an integer when n is a positive integer.

Let

$$\omega(z)=\int_z^\infty w^{-2}\sin^2 w\,dw,$$

where the path of integration is ultimately along the positive real axis, so that $\omega(x)$ is bounded for real x and $\omega(x)\to 0$ as $x\to+\infty$.

Let a_n be positive numbers such that $\sum a_n$ converges but $a_n\lambda(n)$ is unbounded.

Let $1+e^x\geqq\psi(x)\geqq e^x$ with $\psi(n)$ an integer when n is a positive integer.

*) Research supported by the National Science Foundation (U.S.A.).

Then the desired function is furnished by

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \omega\{\lambda(k)[z - \psi(k)]\}.$$

In the first place this series converges uniformly for real x because $\omega(x)$ is bounded. Since each term approaches 0 as $x \to \infty$, it follows that $f(x) \to 0$ as $x \to +\infty$.

The formal series for $-f'(z)$ is

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda(k) \frac{\sin^2\{\lambda(k)[z - \psi(k)]\}}{\{\lambda(k)[z - \psi(k)]\}^2}.$$

This is uniformly convergent on compact sets if

$$\sum a_k \lambda(k) \frac{\exp\{2\lambda(k)|y|\}}{\{\lambda(k)\psi(k)\}^2}$$

converges uniformly when $|y|$ is bounded. This series in turn converges uniformly if

$$\sum \exp\{2\lambda(k)|y| - 2k\}$$

does, and the last series converges uniformly because $\lambda(k) \leqq \mu(k) = o(\log k)$.

Thus $f'(z)$ is entire and hence so is $f(z)$. Moreover, if n is a positive integer,

$$-f'(\psi(n)) = a_n \lambda(n) + \sum_{k \neq n} a_k \lambda(k) \frac{\sin^2\{\lambda(k)[\psi(n) - \psi(k)]\}}{\{\lambda(k)[\psi(n) - \psi(k)]\}^2}.$$

Since $\lambda(k)[\psi(n) - \psi(k)]$ is a non-zero integral multiple of π, all the terms in the series vanish, so that $-f'(\psi(n)) = a_n \lambda(n)$, which is unbounded.

All that remains is to show that $f(z)$ has at most the prescribed rate of growth; it is enough to show that

$$\log|f'(z)| \leqq |z| O\{\mu(|z|)\}.$$

If $|y| \leqq 1$, x is large and positive, and m is the integer such that $\psi(m)$ is the $\psi(k)$ closest to z, then

$$|f'(z)| \leqq \lambda(m) a_m e^{2\lambda(m)|z - \psi(m)|} + \left(\sum_{\psi(k) \leqq x-1} + \sum_{\psi(k) \geqq x+1}\right) \frac{a_k}{\lambda(k)} \frac{e^{2\lambda(k)}}{[x - \psi(k)]^2}.$$

The first term is $O(\log x)$. In the two sums we have *)

$$\frac{1}{[x - \psi(k)]^2} = \frac{1}{\psi(k)^2}\left(1 + \frac{x}{\psi(k) - x}\right)^2 \leqq \frac{(1+x)^2}{\psi(k)^2}, \tag{1}$$

and so the sums do not exceed

$$O(x^2) \sum a_k \exp\{2[\lambda(k) - \psi(k)]\} = O(x^2),$$

*) *Added in proof.* In the next few lines the formulas can be simplified by replacing $\psi(k)$ by k. I am indebted to Dr. Gaier for this and for several other improvements.

since $\lambda(k)-\psi(k)<0$ for large k. If $x<-1$ we have a similar but simpler estimate since $\psi(k)\geqq x+1$ for all k.

If $|y|\geqq 1$, we have

$$|f'(z)|\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda(k)}\frac{\exp\{2\lambda(k)|y|\}}{[x-\psi(k)]^2+1}=\sum_{\psi(k)<x+1}+\sum_{\psi(k)\geqq x+1}=S_1+S_2.$$

If $x<0$, S_1 is empty. Otherwise, in S_1 we have not more than $\log(x+1)$ terms, each not exceeding a fixed multiple of $\exp\{2\lambda(k)|y|\}$, so that

$$S_1\leqq O(1)\log(x+1)\cdot\exp\{2|y|\,\lambda[\log(x+1)]\}\leqq O(|x|)\,e^{|y|\,\mu(|x|)}.$$

In S_2 we have

$$\frac{1}{[\psi(k)-x]^2+1}\leqq\frac{(1+x)^2}{\psi(k)^2}\leqq(1+x)^2e^{-2k}$$

as in (1), and so

$$\begin{aligned}S_2&\leqq O(|x|^2)\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exp\{2[\lambda(k)|y|-k]\}\\&\leqq O(|x|^2)\max_{k\geq 1}\exp\{\mu(k)|y|-2k\},\end{aligned}$$

since $\sum a_k$ converges and $2\lambda(t)\leqq\mu(t)$. The maximum of $\mu(t)|y|-2t$ will occur when $|y|=2/\mu'(t)$. Since $\mu'(t)$ decreases, $2/\mu'$ has an increasing inverse σ, and

$$\begin{aligned}S_2&\leqq O(|x|^2)\exp\{\mu[\sigma(|y|)]\,|y|-2\sigma(|y|)\}\\&\leqq O(|x|^2)\exp\{|y|\,\mu[\sigma(|y|)]\}.\end{aligned}$$

Now $\sigma(t)=o(t)$ since $\mu'(t)=o(1/t)$ and so

$$S_2\leqq O(|x|^2)\exp\{|y|\,\mu(|y|)\}.$$

References

[1] Cartwright, M. L.: Integral functions. Cambridge 1956. — [2] Delange, H., and D. Gaier: Über asymptotische Wege analytischer Funktionen und ihrer Ableitungen. Arch. Math. **7**, 135—142 (1956). — [3] Dzhrbashyan, M. M.: Estimates for the derivatives of entire functions of finite order and normal type. Izv. Akad. Nauk Armyansk. SSR. Fiz.-Mat. Estestv. Tehn. Nauki 8, no. 2, 1—16 (1955) (in Russian); Math. Rev. **17**, 141. — [4] Gaier, D.: Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren. Math. Z. **58**, 453—455 (1953). — [5] Gaier, D.: On the change of index for summable series. Pacific J. Math. **5**, 529—539 (1955). — [6] Plancherel, M., and G. Pólya: Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. Comment. Math. Helv. **9**, 224—248 (1937); **10**, 110—163 (1938).

Northwestern University, Evanston, Illinois (U.S.A.)

(Eingegangen am 12. Mai 1957)

DINGHAS, A.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 299—315 (1957)

Zur Einzigkeitsfrage der Minkowski-Lusternikschen Ungleichung für die Relativoberfläche

Von

ALEXANDER DINGHAS

1. Einleitung. Ist H_0 ein Halbmodul, d.h. eine additive, kommutative Halbgruppe mit den Elementen $x, y, \ldots$, und bedeutet 2^{H_0} den Raum aller nicht leeren Teilmengen von H_0, so bildet letzterer ebenfalls einen Halbmodul, sofern die Summe $A + B$ zweier Elemente A, B von 2^{H_0} durch die Vorschrift

$$A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\} \tag{1.1}$$

definiert wird. Die Halbgruppe 2^{H_0} nennen wir den zu H_0 gehörigen Minkowskischen Halbmodul.

Es sei X nun ein Teilmodul von 2^{H_0} und Φ ein auf X definiertes, nichtnegatives Mengenfunktional. Setzt man

$$F = \sup\{\Phi(M) \mid M \in X\}, \tag{1.2}$$

so soll Φ in X superadditiv heißen, falls für je zwei Elemente A, B von X die Ungleichung

$$\Phi(A + B) \geq \operatorname{Min}\{F, \Phi(A) + \Phi(B)\} \tag{1.3}$$

gilt. Ist $0 < F < +\infty$, so kann diese Größe ohne weiteres gleich Eins angenommen werden.

Mengenfunktionale vom Typus

$$\Phi(A + B) \geq \operatorname{Min}\{1, \Phi(A) + \Phi(B)\} \tag{1.4}$$

gehören bekanntlich zu den interessantesten der elementaren additiven Zahlentheorie.

Ist H_0 ein linearer (oder ein halblinearer) Raum und definiert man λA (λ reell bzw. ≥ 0) durch die Gleichung

$$\lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}, \tag{1.5}$$

so kann Φ, unter Annahme der Linearitätseigenschaft $\Phi(\lambda A) = |\lambda|\,\Phi(A)$ und sofern mit A auch λA zur X gehört, lediglich vom Typus

$$\Phi(A + B) \geq \Phi(A) + \Phi(B) \tag{1.6}$$

sein. Schreibt man diese Ungleichung in der allgemeinen Form

$$\Phi(A+\lambda B)\geq\Phi(A)+\lambda\Phi(B)\qquad(\lambda>0), \tag{1.7}$$

so folgt daraus durch Grenzübergang

$$\Omega(A\,|\,B)\geq\Phi(B), \tag{1.8}$$

mit

$$\Omega(A\,|\,B)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\Phi(A+\lambda B)-\Phi(A)}{\lambda}. \tag{1.9}$$

Die Ungleichung (1.8) soll allgemein die zu (1.6) gehörige isoperimetrische Ungleichung heißen und die Größe $\Omega(A\,|\,B)$ die Relativgröße von A und B.

Liegt eine isoperimetrische Ungleichung von der Form (1.8) vor, so bezeichnet man allgemein als deren Einzigkeitsfrage die Frage nach den Punktmengen A, B, für die das Gleichheitszeichen eintritt.

In Zusammenhang mit der Frage, wichtige superadditive Mengenfunktionale eines vorgelegten Minkowskischen Halbmoduls zu bestimmen, wurde nun im Laufe einer Forschung, die mehr als 50 Jahre gedauert hat, folgendes fundamentale Ergebnis erzielt:

Ist H_0 der n-dimensionale (euklidische) Zahlenraum E^n und ist $X=2^{H_0}$, so liefert die n-te Wurzel des (inneren) Lebesgueschen Maßes L_* ein superadditives Funktional vom Typus (1.6).

Das ist der Inhalt des berühmten Satzes von BRUNN-MINKOWSKI und LUSTERNIK[1]).

Leitet man nun aus der Ungleichung

$$L_*(A+B)^{1/n}\geq L_*(A)^{1/n}+L_*(B)^{1/n} \tag{1.10}$$

die isoperimetrische Ungleichung (1.8) ab, so findet man leicht

$$M(A\,|\,B)\geq L_*(A)^{1-\frac{1}{n}}L_*(B)^{\frac{1}{n}}, \tag{1.11}$$

[1]) Für die Literatur bis 1934, insbesondere für die Leistungen BRUNNs und MINKOWSKIs, sei hier auf das ausführliche Referat von BONNESEN und FENCHEL, Theorie der konvexen Körper (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 3, Verlag Springer, 1934) hingewiesen. LUSTERNIKs Note (Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für meßbare Punktmengen [C. R. Acad. Sci. USSR. **3**, 55—58 (1935)]) ist skizzenhaft gehalten, enthält jedoch alle wesentlichen Beweisgedanken, sofern es sich nicht um Einzigkeitsfragen handelt. Von späteren Arbeiten, in denen die Minkowskischen Methoden auf nicht konvexes A übertragen werden, sollen hier folgende erwähnt werden: 1. DINGHAS, A.: Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen Raum Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturwiss. Kl. **149**, 399—432 (1940). 2. DINGHAS und ERHARD SCHMIDT: Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum. Abh. preuß. Akad. Wiss. Jahrg. 1943, math.-naturwiss. Kl. Nr. 7 (1944), 18 S. 3. BUSEMAN, H.: The isoperimetric Problem for the Minkowski Area. Amer. J. Math. **71**, 743—762 (1949). 4. Die wichtige Arbeit von HENSTOCK und A. M. MACBEATH [On the Measure of Sum-Sets. I. The Theorems of BRUNN-MINKOWSKI and LUSTERNIK. Proc. Lond. Math. Soc., Ser. III **3**, 182—195 (1953)], behandelt als erste mit Minkowskischen Methoden den Fall zweier beliebiger Punktmengen A und B.

mit

$$M(A\,|\,B) = \frac{1}{n}\lim_{h\to 0}\frac{L_*(A+hB)-L_*(A)}{h}. \tag{1.12}$$

Vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zu der bisher allgemein wenig behandelten Einzigkeitsfrage von (1.11), indem für eine Klasse (Klasse $\mathfrak{E}$) von beschränkten jedoch nicht notwendig kompakten Punktmengen die Extremalmengen durch eine notwendige und hinreichende Bedingung charakterisiert werden. Diese Klasse $\mathfrak{E}$ enthält eine kürzlich von HADWIGER und OHMAN[2]) angegebene Klasse abgeschlossener Punktmengen, innerhalb derer (1.11) direkt zu charakterisierende Extremalmengen besitzt, als Spezialklasse.

2. Voraussetzungen. Methode. Ist M eine nichtleere Punktmenge von E^n und S_P^ε eine Kugel um den Punkt $P\in M$ vom Radius $\varepsilon>0$, so setze man

$$\sigma_\varepsilon(P\,|\,M) = L_*(M\cap S_P^\varepsilon)/|\,S_P^\varepsilon\,|. \tag{2.1}$$

Der Punkt P heißt dann ein innerer Dichtepunkt von M, wenn $\lim_{\varepsilon\to 1}\sigma_\varepsilon(P\,|\,M)$ existiert und gleich Eins ist[3]). Die Gesamtheit der inneren Dichtepunkte von M heißt der Dichtekern von M und wird mit M_* bezeichnet.

Der (äußere) Dichtekern M^* von M wird analog dadurch definiert, indem man in (2.1) $L_*(M\cap S_P^\varepsilon)$ durch das äußere Lebesguesche Maß $L^*(M\cap S_P^\varepsilon)$ ersetzt.

Mit Hilfe von M_* läßt sich unsere Einzigkeitsklasse $\mathfrak{E}$ durch folgende zwei Forderungen abgrenzen:

1. Für jedes $A, B\in\mathfrak{E}$ ist $L_*(A)>0$, $L_*(B)>0$.

2. Für jedes $A\in\mathfrak{E}$ ist $\bar{A}-\overline{(A_*)}$ entweder leer, oder es gibt eine Hyperebene H_{n-1} von E^n derart, daß die Projektion dieser Menge auf H_{n-1} mindestens einen inneren Dichtepunkt (relativ zu H_{n-1}) aufweist und somit ein positives (wieder relativ zu H_{n-1}) Maß hat. Dabei bedeutet $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A und $\overline{(A_*)}$ diejenige von A_*.

---

[2]) Abgesehen von der Arbeit von BUSEMAN, wo unter anderem das isoperimetrische Problem für eine Klasse von Punktmengen mit bestimmter Randbeschaffenheit mit Hilfe Minkowskischer und nichtminkowskischer Methoden erledigt wird, gab es bis zur kürzlich erschienenen Arbeit von HADWIGER und OHMAN [Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie, Math. Z. **66**, 1—8 (1956)] keine allgemeine Punktmengenklasse, innerhalb derer Einzigkeitsaussagen gemacht werden konnten. Die von den beiden Autoren verwendete Klasse fällt im wesentlichen mit einer Klasse abgeschlossener Punktmengen zusammen, deren Punktmengen A die Bedingung $\bar{A}_*=A$ erfüllen. Innerhalb dieser Klasse konnte ich (mit Hilfe der Methoden der in Fußnote 1 aufgeführten Arbeiten 1. und 2.) das Extremalproblem erledigen und den Beweis zusammen mit anderen Verallgemeinerungen des Brunn-Minkowski-Lusternikschen Satzes in einem vorläufigen Manuskript aufnehmen und Mitte 1955 an Herrn Süss schicken. Die weitere Bearbeitung der dort enthaltenen Ansätze überzeugten mich, daß diese Klasse durch eine bei weitem umfassendere ersetzt werden kann. Das ist auch der Grund, warum ich mich entschloß, vorliegende Arbeit trotz des Erscheinens der Arbeit von HADWIGER und OHMAN zu veröffentlichen.

[3]) Man vgl. z.B. SAKS, S.: Theory of the Integral (Warsaw, 1937, 2. Aufl.) S. 129.

Die Punktmengen B sollen außer der Bedingung $L_*(B) > 0$ (und der Beschränktheit) keiner weiteren Bedingung unterworfen werden.

Das Hauptergebnis der Arbeit lautet nun:

Innerhalb der Klasse $\mathfrak{E}$ kann das Gleichheitszeichen in (1.11) *dann und nur dann eintreten, wenn $\bar{A}$ und $\bar{B}$ homothetische konvexe Körper sind, aus denen man höchstens eine Nullmenge entfernt hat.*

Schon das Fehlen jeglicher weiteren Bedingung für B außer der Bedingung $L_*(B) > 0$ zeigt, daß $\mathfrak{E}$ bei weitem umfangreicher als die von HADWIGER und OHMAN betrachtete Klasse abgeschlossener Punktmengen ist. Letztere Klasse wird nämlich dadurch charakterisiert, daß sowohl A als auch B die Eigenschaft haben, daß die Größen $\sigma_\varepsilon(P|A)$ $(P \in A)$ bzw. $\sigma_\varepsilon(Q|B)$ $(Q \in B)$ für jedes $\varepsilon > 0$ positiv ausfallen. Da man durch Weglassung von 2. keine eindeutig bestimmten Punktmengen erhält, so scheint in dieser Richtung das hier gewonnene Resultat in einer Hinsicht abschließend zu sein.

Die Methode, mit deren Hilfe ich den Beweis dieses Einzigkeitssatzes erbringe, verwendet einen ähnlichen Kunstgriff wie den, mit dessen Hilfe ERHARD SCHMIDT und ich in der vorhin zitierten Arbeit die Minimaleigenschaft der Kugel bewiesen haben[4]). Dabei verwende ich noch einige wichtige Resultate von HENSTOCK und MACBEATH über die Eigenschaften des Dichtekerns M_* von M.

3. Allgemeine Eigenschaften der Extremalpunktmengen. Sind A, B $(A, B \in \mathfrak{E})$ Extremalpunktmengen von (1.11), so gilt zunächst der Satz:

Hilfssatz 1. *Sind A, B Extremalpunktmengen, so trifft dies auch für λA, μB mit $\lambda, \mu > 0$ zu.*

Beweis. Ersetzt man in (1.12) A, B durch σA, σB $(\sigma > 0)$, so folgt daraus, indem man σh durch λ ersetzt und die allgemeine Gleichung $L_*(\sigma M) = \sigma^n L_*(M)$ berücksichtigt,

$$M(\sigma A | B) = \sigma^{n-1} M(A | B).$$

Andererseits ist

$$M(A | \varrho B) = \varrho M(A | B) \qquad (\varrho > 0),$$

also

$$M(\lambda A | \mu B) = \lambda^{n-1} \mu M(A | B) = \lambda^{n-1} \mu L_*(A)^{1-\frac{1}{n}} L_*(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Daraus folgt

$$M(\lambda A | \mu B) = L_*(\lambda A)^{1-\frac{1}{n}} L_*(\mu B)^{\frac{1}{n}}.$$

Nachfolgende Hilfssätze sind allgemeiner Natur und werden hier ohne Beweis angeführt:

Hilfssatz 2 (HENSTOCK und MACBEATH). *Ist M eine beliebige, beschränkte Punktmenge von E^n, so ist M_* meßbar und es gilt*

(3.1) $$L(M_*) = L_*(M).$$

[4]) Das dortige Verfahren läßt sich ohne Schwierigkeit auf konvexe Punktmengen B übertragen. Man vgl. z.B. Fußnote 13 der in der Fußnote 1 zitierten Arbeit 1.

Hilfssatz 3 (HENSTOCK und MACBEATH). *Es gilt für nichtleere,* A_*, $B_* \subseteq E^n$

$$(A+B)_* \supseteq A_* + \overline{B}. \tag{3.2}$$

Für die Beweise dieser beiden Hilfssätze sei auf die Arbeit von HENSTOCK und MACBEATH[5]) verwiesen.

Durch Heranziehung dieser Hilfssätze von HENSTOCK und MACBEATH können wesentliche Aussagen über die Extremalmengen gemacht werden. Zunächst folgt leicht aus (3.2) für $h>0$

$$(A + hB)_* \supseteq (A_* + h\overline{B})_* \supseteq \overline{(A_*)} + h\overline{B}_*, \tag{3.3}$$

und durch Vertauschung von A und B und der Rolle von h

$$(A + hB)_* \supseteq (\overline{A} + hB_*)_* \supseteq \overline{A}_* + h\overline{(B_*)}. \tag{3.4}$$

Da nun allgemein

$$L(\overline{A}) \geq L\big(\overline{(A_*)}\big) \geq L(A_*) = L_*(A)$$

und

$$L(\overline{B}) \geq L\big(\overline{(B_*)}\big) \geq L(B_*) = L_*(B)$$

ist, so gilt zunächst für jedes Extremalpaar (A, B)

$$M(A\,|\,B) = M(A_*|\,\overline{B}) = M\big(\overline{(A_*)}|\,\overline{B}_*\big),$$

und

$$M(A\,|\,B) = M(\overline{A}|\,B_*) = M\big(\overline{A}_*|\,\overline{(B_*)}\big).$$

Der gemeinsame Wert dieser Ausdrücke ist gleich $L_*(A)^{1-\frac{1}{n}}\, L_*(B)^{\frac{1}{n}}$. Nun ist offenbar noch

$$M(A\,|\,B) = M(A\,|\,B_*) = M(A_*|\,B) = L_*(A)^{1-\frac{1}{n}}\, L_*(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Verbindet man jetzt die Aussagen dieser drei Gleichungen, so hat man:

1. Ist (A, B) ein Extremalpaar von (1.11), so sind die Punktmengenpaare $(A_*, \overline{B})$, $(\overline{(A_*)}, \overline{B}_*)$, $(\overline{A}, B_*)$ $(\overline{A}_*, \overline{(B_*)})$, (A, B_*) und (A_*, B) ebenfalls Extremalpaare.

2. Ist (A, B) ein Extremalpaar von (1.11), so gilt

$$L_*(A) = L(\overline{A}) = L(\overline{A}_*) = L\big(\overline{(A_*)}\big), \tag{3.5}$$

und

$$L_*(B) = L(\overline{B}) = L(\overline{B}_*) = L\big(\overline{(B_*)}\big). \tag{3.6}$$

Dieses Ergebnis gestattet, die Einzigkeitsfrage des Problems der Relativoberfläche dadurch zu vereinfachen, daß man dort jedes Extremalpaar (A, B) zunächst durch das Paar der Mengen $\overline{(A_*)}$ und $\overline{B}_*$ ersetzt. Um nicht

[5]) loc. cit. Fußnote 1, S. 185f. Daß $M - M_*$ das Maß Null hat, ist bekannt gewesen und bildet den Inhalt eines berühmten Satzes von LEBESGUE und SAKS (SAKS, loc. cit. S. 129f.) Wie HENSTOCK und MACBEATH gezeigt haben, gilt Hilfssatz 3 (wie auch 4) unter bestimmten Voraussetzungen, auch in topologischen Gruppen. Wie noch dort gezeigt wird, ist M_* eine $F_{\sigma\delta}$-Menge.

dabei die Schreibweise wesentlich zu erschweren, soll im folgenden von vornherein $A = \overline{(A_*)}$ und $B = \overline{B}_*$ angenommen werden. Sind einmal die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Extremalpaar $(\overline{(A_*)}, \overline{B}_*)$ gefunden, so bietet der Übergang zu dem ursprünglichen Paar (A, B) keine Schwierigkeit, sofern es sich dabei um Punktmengen der Klasse $\mathfrak{E}$ handelt.

Man betrachte jetzt eine beliebige F_σ-Menge A mit $L_*(A) > 0$ und bilde das Intervall $J_{A_*} = (\alpha_{A_*}, \beta_{A_*})$ durch die Vorschrift

$$\alpha_{A_*} = \inf\{x_n \mid P \in A_*\}, \quad \beta_{A_*} = \sup\{x_n \mid P \in A_*\},$$

wobei $P = P(x_1, \ldots, x_n)$ einen Punkt von E^n bedeuten soll. Ferner bilde man die Schnitte $A^x = A \cap E_x^{n-1}$ und bezeichne mit $L_{n-1}(A^x)$ das $(n-1)$-dimensionale Lebesguesche Maß in bezug auf die Hyperebene E_x^{n-1} $(x_n = x)$[6]. Dann gilt der

Hilfssatz 4. *Es sei (A, B) ein Extremalpaar von (1.11) mit $L_*(A) > 0$, $L_*(B) > 0$. Man schreibe der Kürze wegen wieder A, B für das Extremalpaar $\overline{(A_*)}\ \overline{B}_*$ und bilde das Intervall J_{A_*}. Dann ist für jedes $x \in J_{A_*}$, $L_{n-1}(A^x) > 0$.*

Beweis. Es sei zunächst $n > 1$. Mit Rücksicht auf den Hilfssatz 1 kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $L(A) \neq L(B)$ voraussetzen. Es bezeichne S eine offene Kugel von E^n, die $2B$ enthält. Da es auf eine Parallelverschiebung von B nicht ankommt, so kann noch angenommen werden, daß der Mittelpunkt von S in 0 liegt. Es sei $h > 0$ und $x \in J_{A_*}$. Man bezeichne durch A_1 bzw. A_2 die Teilmengen von A mit $x_n \leqq x$ bzw. $x_n \geqq x$. Dann gilt

$$L(A) = L(A_1 \cup A_2) = L(A_1) + L(A_2), \tag{3.7}$$

und

$$\begin{cases} L(A + hB) = L(A_1 + hB \cup A_2 + hB) \\ \qquad = L(A_1 + hB) + L(A_2 + hB) - L(A_1 + hB \cap A_2 + hB). \end{cases} \tag{3.8}$$

Es bezeichne jetzt G eine offene Punktmenge auf E_x^{n-1} (z. B. die Vereinigung von endlich vielen offenen Kugeln), die $A_1 \cap A_2 = A^x$ überdeckt. Dann gibt es ein $h_0 > 0$ derart, daß für $0 < h < h_0$

$$A_1 + hB \cap A_2 + hB \leqq G + hS \tag{3.9}$$

gilt. Man betrachte in der Tat eine monoton gegen Null abnehmende Folge (h_k) $(k = 1, 2, \ldots)$ von h-Werten und nehme an, es gäbe zu jedem k einen Punkt P_k, $P_k \in A_1 + h_k B$ und $P_k \in A_2 + h_k B$, welcher der Punktmenge $G + h_k S$ nicht angehört. Da A_1, A_2 nicht leer und abgeschlossen sind, so enthält (P_k) eine konvergente Teilfolge, deren Punkte gegen einen Punkt P_0 von $A_1 \cap A_2$ konvergieren müssen. Nun kann nach Voraussetzung P_0 nur in der zu G komplementären Menge G' (in bezug auf E_x^{n-1}) liegen, was offenbar falsch ist, da ja jeder Punkt von $A_1 \cap A_2$ in G liegen muß.

[6]) Allgemein soll L_k das Lebesguesche Maß in bezug auf den linearen Unterraum $E^k_{x_{k+1}, \ldots, x_n}$ (kurz E^k) bedeuten, dessen Punkte $P(v_1, \ldots, v_k)$ vorgegebene Koordinaten $v_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, v_h = x_n$ haben. Für $k = 0$ soll allgemein L_0 die charakteristische Funktion der betreffenden (linearen) Menge darstellen.

Nun gilt zunächst

$$L(G + h\,S) \leq 2L_{n-1}(G^{hr})\,hr, \tag{3.10}$$

wobei r der Radius von S ist, und G^{hr} die Außenmenge von G (auf E_x^{n-1}) in der Entfernung hr bedeutet.

Setzt man diese Abschätzung in (3.8) ein und läßt $h \to 0$ konvergieren, so erhält man dann leicht

$$M(A\,|\,B) \geq M(A_1|\,B) + M(A_2|\,B) - \frac{2}{n} L_{n-1}(G)\,r, \tag{3.11}$$

also schließlich

$$M(A\,|\,B) \geq M(A_1|\,B) + M(A_2|\,B) - \frac{2}{n} L_{n-1}(A^x)\,r.$$

Ist nun

$$M(A\,|\,B) = L(A)^{1-\frac{1}{n}}\,L(B)^{\frac{1}{n}} \quad \big(L(B) > 0\big),$$

so würde daraus die Ungleichung

$$\big(L(A_1) + L(A_2)\big)^{1-\frac{1}{n}} \geq L(A_1)^{1-\frac{1}{n}} + L(A_2)^{1-\frac{1}{n}} - \frac{2r}{n} \frac{L_{n-1}(A^x)}{L(B)}$$

folgen, die, sobald $L_{n-1}(A^x) = 0$ ist, falsch ist.

Es sei jetzt $n = 1$ und (A, B) ein Extremalpaar von (1.11) auf E^1. Dann ist zunächst $(\bar{A}, B_*)$ ebenfalls ein Extremalpaar. Ist dann $[\bar{A}] \cap \overline{(A')}$ nicht leer[7]), so gilt für kleine h

$$L_*(\bar{A} + h\,B_*) \geq L(\bar{A}) + 2hL_*(B), \tag{3.12}$$

und somit wegen $L(B) > 0$

$$M(\bar{A}\,|\,B_*) \geq 2L_*(B) > L_*(B). \tag{3.13}$$

Daraus folgt zunächst, daß $\bar{A}$ eine Strecke sein muß und somit A_* ein offenes Intervall. Nun ist mit (A, B) auch $(A_*, \bar{B})$ ein Extremalpaar. Enthält jetzt $[\bar{B}] \cap \overline{(B')}$ ein offenes Intervall J, so gilt für kleine h

$$L(A_* + h\bar{B}) \geq h|J| + L_*(A) + hL(\bar{B}). \tag{3.14}$$

Soll nun $M(A_*|\bar{B}) = L(\bar{B})$ gelten, so muß J leer und $\bar{B}$ eine Strecke sein. Das beweist nicht nur den Hilfssatz 4[8]) für $n = 1$, sondern liefert zugleich die Extremalbedingungen von (1.11) für den linearen Fall. Danach kann

---

[7]) Mit $[M]$ wird allgemein die konvexe Hülle von M bezeichnet werden. M' bedeutet wie üblich die zu M komplementäre Menge.

[8]) Für den einfachen Fall A kompakt, B = Kugel, vgl. man Dinghas und Erhard Schmidt, loc. cit. Fußnote 1, S. 11. Bei dieser Gelegenheit soll noch hier bemerkt werden, daß ich die Frage A kompakt und B konvex durch die Fußnote 13 meiner in der Fußnote 1 unter 1. zitierte Arbeit als miterledigt betrachtete.

dort (für $n=1$) das Gleichheitszeichen dann und nur dann eintreten, wenn $\bar{A}, \bar{B}$ zwei Strecken von E^1 sind.

4. Einfacher Beweis der Superadditivität von $L_*(M)^{1/n}$. Verzichtet man auf eine Umgestaltung der Brunn-Minkowskischen Methode, die (wie es HENSTOCK und MACBEATH getan haben) zugleich die Einzigkeitsfrage der Brunn-Minkowskischen Ungleichung zu behandeln gestattet, so scheint nachfolgendes Verfahren, soweit es sich um den bloßen Nachweis der Superadditivität des Mengenfunktionals $L_*(M)^{1/n}$ handelt, das einfachste zu sein.

Es sei N ein achsenparalleles Netz von E^n und M eine Würfelmenge, d.h. eine Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Würfeln von N. Ferner sei bei einem gegebenen Punkt $P(x_1, \ldots, x_n)$ von M, E_P^{n-k} $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ die lineare Mannigfaltigkeit $v_1 = x_1, \ldots, v_k = x_k$. Man definiere g_k^M für $k=0, 1, \ldots, n-1$ als den $(n-k)$-dimensionalen Inhalt von $M \cap E_P^{n-k}$ und setze $g_n^M = 1$. Außerhalb M setze man $g_k^M = 0$ $(k=1, \ldots, n)$. Nun ordne man jedem Punkt $P(x_1, \ldots, x_n) \in M_* = \mathrm{int}(M)$ den Punkt $T(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ des Würfels

$$W_0\colon \quad 0 < \tau_k < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.1}$$

vermöge der Gleichungen

$$g_{k-1}^M(x_1, \ldots, x_{k-1})\,\tau_k = \int_{-\infty}^{x_k} g_k^M(x_1, \ldots, x_{k-1}, x)\,dx. \tag{4.2}$$

zu.

Man sieht ohne weiteres ein, daß die Bildmenge $T(M)$ den Würfel W_0 bis auf eine Teilmenge T', die auf höchstens endlich vielen achsenparallelen Mannigfaltigkeiten (bis zur Dimension $n-1$) liegt, ausfüllt. Ebenfalls sieht man mit Hilfe der Monotonie der Abbildungsfunktionen (in bezug auf die jeweils letzte Veränderliche), daß die Abbildung $M_* \to T(M)$ eineindeutig ist.

Es seien jetzt A, B zwei kompakte Punktmengen von E^n, und es seien N^A, N^B die kleinsten Würfelmengen von N, die A, B überdecken. Bildet man dann $N^A + N^B$ $(h>0)$[9]), und beachtet man, daß diese Menge die Punktmenge, deren Punkte die Koordinaten

$$v_k^{N^A}(\tau_1, \ldots, \tau_k) + v_k^{N^B}(\tau_1, \ldots, \tau_k) \qquad \left(T \in T_0 = T(A) \cap T(B)\right)$$

haben, enthält, so erhält man mit Rücksicht darauf, daß die Jacobische Determinante $D(x|\tau)$ der Transformation $M \to T(M)$ durch die Gleichung

$$D(x|\tau) = \prod_1^{n-1} \left\{ \frac{g_{k-1}^{N^A}}{g_k^{N^A}} + \frac{g_{k-1}^{N^B}}{g_k^{N^B}} \right\} \tag{4.3}$$

gegeben wird, die Abschätzung

$$|N^A + N^B| \geq \int_{T_0} D(x|\tau)\,d\tau_1 \ldots d\tau_n. \tag{4.4}$$

[9]) In ihrer einfacheren Form B-konvex geht diese Transformation auf eine mündliche Mitteilung von ERHARD SCHMIDT aus dem Jahre 1942 zurück. [Man vgl. auch meinen Aufsatz: Über einen geometrischen Satz von WULFF für die Gleichgewichtsformen von Kristallen. Z. Kristallogr. A **105**, 304—314 (1943).

Nun gilt nach einer klassischen Ungleichung[10]) wegen $g_0^A = |N^A|$, $g_0^B = |N^B|$

$$D(x|\tau) \geq (|N^A|^{1/n} + |N^B|^{1/n})^n, \tag{4.5}$$

und somit wird

$$|N^A + N^B|^{1/n} \geq |N^A|^{1/n} + |N^B|^{1/n}. \tag{4.6}$$

Läßt man jetzt den Durchmesser der Würfel von N gegen Null konvergieren, und bezeichnet allgemein den Äußeren (Jordanschen) Inhalt von M durch $J^*(M)$, so erhält man

$$J^*(A+B)^{1/n} \geq J^*(A)^{1/n} + J^*(B)^{1/n}. \tag{4.7}$$

Liegen nun zwei beliebige Punktmengen A, B von E^n vor, so erhält man daraus durch Ausschöpfung mittels ansteigender Folgen kompakter Punktmengen, die gegen A, bzw. gegen B konvergieren,

$$L_*(A+B)^{1/n} \geq L_*(A)^{1/n} + L_*(B)^{1/n}. \tag{4.8}$$

Diese Ungleichung liefert durch Grenzübergang $h \to 0$ nach vorheriger Substitution $B \to hB$, die Lusternikschе isoperimetrische Ungleichung (1.11). Jedoch erfordert die Einzigkeitsfrage stärkere analytische Hilfsmittel, die wir gleich entwickeln werden.

5. Die Einzigkeitsfrage von (1.11). Anfang. Der Beweis von (4.8) kann leicht mit Hilfe eines Induktionsverfahrens erbracht werden. Das soll hier unter der Voraussetzung, daß A, B ein Extremalpaar von (1.11) ist, getan werden. Da der Fall $n=1$ durch die Schlußausführungen von 3. als abgeschlossen angesehen werden kann, so soll im folgenden $n>1$ angenommen werden.

Wir formen die erste der Gln. (4.2) um und definieren mit Henstock und Macbeath zunächst für eine beliebige F_σ-Menge M von E^n die Funktion $x_M(\tau)$ durch die Gleichung

$$x_M(\tau) = \inf\{x | \int_{-\infty}^{x} L_{n-1}(M^v)\, dv \geq \tau L(M)\}. \tag{5.1}$$

Hier interessiert uns lediglich der Fall $L(M)>0$.

Die Funktion $x(\tau)$ ist im Intervall T: $0<\tau<1$ eigentlich monoton. Ist $X_M = x_M(T)$ und $x_0 \in X_M$, so gibt es einen einzigen Punkt $\tau_0 \in T$ mit

[10]) Allgemein gilt für $x_k, y_k \geq 0$ $(k=1, \ldots, l)$ und $r_k>0$, $r_1+\cdots+r_l=1$,

$$\prod_1^l (x_k+y_k)^{r_k} \geq \prod_1^l x_k^{r_k} + \prod_1^l y_k^{r_k},$$

sobald nicht alle y_k/x_k gleich einer festen Konstanten sind. Man vgl. z.B.: Hardy-Littlewood, Polya, Inequalities, Cambridge, 1952, 2. Aufl. S. 39.

$x_M(\tau_0) = x_0$. Die Umkehrung $\tau = \tau(x)$ von (5.1) ist in $[X_M]$ totalstetig und kann direkt durch die Gleichung

$$\tau = \tau_M(x) = \int_{-\infty}^{x} L_{n-1}(M^v)\, dv / L(M) \tag{5.2}$$

definiert werden. Ihre Ableitung $\frac{d\tau_M}{dx}$ ist fast überall gleich $L_{n-1}(M^x)/L(M)$.

Es sei jetzt (A, B) ein Extremalpaar von (1.11). Dann ist $(\overline{A_*})$, $\overline{B}_*$ ebenalls ein Extremalpaar. Im folgenden soll also zunächst angenommen werden, daß $A = \overline{(A_*)}$ und $B = \overline{B}_*$ gilt, und daß beide Punktmengen nicht leer sind.

Wir bilden jetzt für die beiden Mengen A, B die Funktionen $x_A(\tau)$ bzw. $x_B(\tau)$ und definieren diese für $\tau = 0$ bzw. $\tau = 1$ durch Stetigkeit. Es bedeute $E_x^r (r > 0)$ die Punktmenge $\{x \mid L_{n-1}(A^x) < r\}$ und $\varphi_r(x)$ die charakteristische Funktion von E_x^r. Dann ist E_x^r mit Rücksicht auf den klassischen Fubinischen Satz meßbar, und es gilt

$$L_1(E_x^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(x)\, dx.$$

Man betrachte jetzt die Punktmenge

$$E_\tau^r = \{\tau \mid L_{n-1}(A^{x(\tau)}) < r\},$$

wobei $x(\tau)$ die (stetige, monotone) Funktion $x_A(\tau)$ bedeutet. Es sei $\varphi_r^*(\tau)$ die charakteristische Funktion von E_τ^r. Beachtet man, daß $\varphi_r^*(\tau(x)) = \varphi_r(x)$ gilt, so folgt daraus, daß $\varphi_r^*(\tau(x))$ meßbar ist und mithin [wegen der Meßbarkeit von $L_{n-1}(A^x)$], auch $\varphi_r(x) L_{n-1}(A^x)$ meßbar. Da nun nach klassischen Sätzen der Lebesgueschen Integrationstheorie[11])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r^*(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(x) \frac{d\tau}{dx}\, dx$$

ist, sobald eines der beiden Integrale existiert, so existiert das Integral links und somit muß E_τ^r meßbar sein. Ist dies nun der Fall, so existiert

$$I(\tau) = \int_0^\tau L_{n-1}(A^{x(\tau)}) \frac{d\tau}{}$$

für jedes τ, $0 < \tau < 1$. Transformiert man jetzt dieses Integral mit Hilfe der (totalstetigen) Funktion $\tau = \tau(x)$, so erhält man leicht, indem man die Gleichung $\frac{d\tau}{dx} = L_{n-1}(A^x)/L(A)$ fast überall auf der x-Achse berücksichtigt

[11]) Man vgl. z.B. RADO, T., u. P. V. REICHELDERFER: Continuous Transformations in Analysis, S. 318. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

bei geeigneten Translation von A

$$x_A(\tau) = L(A) \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{L_{n-1}(A^{x(\tau)})},$$

und infolgedessen muß $x_A(\tau)$ totalstetig sein. Beachtet man noch, daß $\tau = \tau(x_B)$ totalstetig ist, so ist $x_A(\tau(x_B))$, also x_A als Funktion von x_B in $x_B \in [X_B]$ totalstetig.

Schreibt man für diese Funktion kurz $\xi = \xi(x)$, so gilt fast überall dort

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{L(A)}{L(B)} \frac{L_{n-1}(B^x)}{L_{n-1}(A^\xi)} \tag{5.3}$$

Die Ableitung ist in jedem inneren Punkt von $[X_B]$ endlich.

Es bezeichne jetzt X_1 die Teilmenge von $[X_B]$ auf der $L_{n-1}(B^x) > 0$ gilt. Diese Menge ist meßbar. Bildet man also die Menge

$$X_0 = \{\eta | \eta = x + \xi(x),\ x \in X_1\},$$

so ist diese ebenfalls meßbar und die Zuordnung der Punkte von X_0 und X_1 durch die Funktion $\eta = \eta(x)$ eineindeutig. Man schreibe nun C für $A + B$ und definiere die Intervalle $J_{B_*} = (\alpha_{B_*}, \beta_{B_*})$ und $J_{C_*} = (\alpha_{C_*}, \beta_{C_*})$, ähnlich wie J_{A_*}. Dann bildet $\eta(x)$ das Intervall $[X_B]$ (infolge der eigentlichen Monotonie von x) eineindeutig auf das Intervall $[\alpha_{A_*} + \alpha_{B_*},\ \beta_{A_*} + \beta_{B_*}] = [\alpha_{C_*}, \beta_{C_*}]$ ab. Nun ist X_0 die Abbildungsmenge der meßbaren Punktmenge X_1 durch die totalstetige Funktion $\eta(x)$ und somit eine meßbare Punktmenge. Es gilt also

$$L(C) \geqq \int_{X_0} L_{n-1}(C^\eta)\, d\eta. \tag{5.4}$$

Es bezeichne nun $\varphi_0(\eta)$ die charakteristische Funktion von X_0 und $\varphi_1(x)$ diejenige von X_1. Da $\xi(x)$ totalstetig in bezug auf x ist, so gilt nach dem Transformationssatz der Lebesgueschen Integraltheorie[12])

$$\int_{[X_0]} \varphi_0(\eta)\, L_{n-1}(C^\eta)\, d\eta = \int_{[X_1]} \varphi_1(x)\, L_{n-1}(C^\eta)\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right) dx.$$

Wendet man diese Betrachtungen auf die Bildung $A + hB$ $(h > 0)$ an, so erhält man die Ungleichung

$$L(A + hB) \geqq \int_{X_1} L_{n-1}(C^{\eta_h}) \left(h + \frac{d\xi}{dx}\right) dx, \tag{5.5}$$

mit $\eta_h = hx + \xi(x)$, $(x = x_B)$.

[12]) loc. cit. Fußnote 11.

Nun verwende man die Identität

$$L(A) = \int_{X_1} L_{n-1}(A^\xi)\,\frac{d\xi}{dx}\,dx, \tag{5.6}$$

und bilde die Differenz mit (5.5). Dann wird, wenn man zunächst

$$M^h(A\,|\,B) = \frac{1}{n}\,\frac{L(A+hB)-L(A)}{h} \tag{5.7}$$

und (für $n>1$)

$$\overline{M}^h_{n-1}(A^\xi\,|\,B^x) = \frac{1}{n-1}\,\frac{L_{n-1}(C^{\eta_h(x)})-L_{n-1}(A^\xi)}{h} \tag{5.8}$$

setzt und die Ungleichung $L_{n-1}(C^{\eta_h}) \geq L_{n-1}(A^\xi)$ berücksichtigt,

$$M^h(A\,|\,B) \geq \int_{X_1} \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\overline{M}^h_{n-1}(A^\xi\,|\,B^x)\,\frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{n}\,L_{n-1}(A^\xi)\right\} dx. \tag{5.9}$$

Jetzt formen wir den Integranden rechts um, indem wir den Zwischenausdruck

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) L_{n-1}(A^\xi)^{\frac{n-2}{n-1}}\,L_{n-1}(B^x)^{\frac{1}{n-1}}\,\frac{d\xi}{dx}$$

verwenden. Man setze

$$D^h(A\,|\,B) = M^h(A\,|\,B) - L(A)^{1-\frac{1}{n}}\,L(B)^{\frac{1}{n}},$$

und

$$\overline{D}^h_{n-1}(x) = \overline{M}^h_{n-1}(x) - L_{n-1}(A^\xi)^{\frac{n-2}{n-1}}\,L_{n-1}(B^x)^{\frac{1}{n-1}},$$

mit $\overline{M}^h_{n-1}(x) = \overline{M}^h_{n-1}(A^\xi\,|\,B^x)$. Die Funktion

$$J(x) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{L(A)}{L(B)}\,L_{n-1}(A^\xi)^{-\frac{1}{n-1}}\,L_{n-1}(B^x)^{\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{n}\,L_{n-1}(A^\xi),$$

ist nun in jedem offenen Intervall, das ganz in $[X_1]$ liegt, endlich und meßbar und genügt der Ungleichung[13])

$$J(x) \geq \left\{\frac{L(A)}{L(B)}\right\}^{\frac{n-1}{n}} L_{n-1}(B^x). \tag{5.10}$$

Somit wird zunächst mit Hilfe von (5.9)

$$D^h(A\,|\,B) \geq \left(1-\frac{1}{n}\right)\int_{X_1} \overline{D}^h_{n-1}(x)\,\frac{d\xi}{dx}\,dx. \tag{5.11}$$

[13]) Nimmt man in Fußnote 10 $l=2$, so gilt $r_1x_1+r_2x_2-(r_1\sqrt{x_1}+r_2\sqrt{x_2})^2 = r_1r_2(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2$ und somit wegen $(r_1\sqrt{x_1}+r_2\sqrt{x_2})^2 \geq x_1^{r_1}x_2^{r_2}$ die Ungleichung $r_1x_1+r_2x_2-x_1^{r_1}x_2^{r_2} \geq r_1r_2(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2$.

Der Integrand $\overline{D}_{n-1}^{h}(x)$ ist mit Rücksicht auf die Ungleichung

$$\overline{D}_{n-1}^{h}(x) \geq \frac{1}{n-1} \frac{L_{n-1}(A^{\xi+hx}) - L_{n-1}(A^{\xi})}{h}$$

nicht negativ. Man wähle eine monoton gegen Null konvergierende Folge (h_k) $(k = 1, 2, \ldots)$, für die $\lim_{k\to\infty} M^{h_k}(A \mid B) = M(A \mid B)$ ist. Dann folgt aus (5.11)

$$\lim_{k\to\infty} \int_{X_1} \overline{D}_{n-1}^{h_k}(x) \frac{d\xi}{dx}\, dx = 0. \tag{5.12}$$

Wendet man hier das klassische Fatousche Lemma[14]) an, so erhält man daraus die Bedingungen

1. Die Funktion $\overline{D}_{n-1}(x) = \lim_{k\to\infty} \overline{D}_{n-1}^{h_k}(x)$ ist in X_1 meßbar.
2. Es gilt

$$\int_{X_1} \overline{D}_{n-1}(x) \frac{d\xi}{dx}\, dx = 0. \tag{5.13}$$

Man setze jetzt

$$M_{n-1}(A^{\xi} \mid B^{x}) = \frac{1}{n-1} \lim_{h\to 0} \frac{L_{n-1}(A^{\xi+hx}) - L_{n-1}(A^{\xi})}{h},$$

und

$$D_{n-1}(x) = M_{n-1}(A^{\xi} \mid B^{x}) - L_{n-1}(A^{\xi})^{\frac{n-2}{n-1}} L_{n-1}(B^{x})^{\frac{1}{n-1}}. \tag{5.14}$$

Dann folgt aus (5.14) wegen $\overline{D}_{n-1}(x) \geq D_{n-1}(x) \geq 0$, die Bedingung:

Eine notwendige Bedingung dafür, daß in (1.11) *das Gleichheitszeichen eintritt, ist die, daß das* $(n-1)$*-dimensionale Defizit* $D_{n-1}(x)$ *fast überall in* X_1 *verschwindet.*

Somit ist die Brücke für die Anwendung eines Induktionsverfahrens geschlagen. Betrachtet man die Umkehrung von $\xi(x)$ und definiert man diese durch die Gleichung

$$x(\xi) = \inf\{t \mid \xi(t) \geq \xi\}, \tag{5.15}$$

so kann man die Bedingung (5.13) auch in der Form

$$\int_{J_{A_*}} D_{n-1}(\xi)\, d\xi = 0 \tag{5.16}$$

schreiben. Hierbei bedeutet $D_{n-1}(\xi)$ wieder die Größe (5.14) mit $x = x(\xi)$.

6. Durchführung des Induktionsverfahrens. Ende des Beweises. Ist $n = 1$ und sind A, B beliebige kompakte Mengen von E^1, so gilt, wie schon erwähnt, $D_1 = M(A \mid B) - L(B) = 0$ dann und nur dann, wenn A, B zwei Strecken sind. Wir zeigen jetzt: Bilden A, B $(A = \overline{A_*}, B = \overline{B}_*)$ ein Extremalpaar von (1.11), so müssen $A, \overline{B}$ konvex und homothetisch sein. Diese Behauptung ist für $n = 1$ richtig. Man nehme für die Dimension $n-1$ $(n \geq 2)$ folgende Aussage als richtig an:

[14]) Man vgl. z. B. Saks: loc. cit. Fußnote 3, S. 29

Ist $x\,(x \in X_1)$ ein Punkt, für den $D_{n-1}(x) = 0$ gilt, so sind $\overline{(A^\xi)}_*$ und $\overline{(B^x)}_*$ zwei kompakte (homothetische), konvexe Punktmengen. Dabei soll allgemein $(M^x)_*$ den inneren Dichtekern von M^x in bezug auf die Hyperebene E_x^{n-1} bedeuten.

Die aufgestellte Behauptung ist offenbar für $n = 2$ richtig. Man nehme jetzt an, die Punktmenge A $(A = \overline{(A_*)}!)$ sei nicht konvex. Ist dies der Fall, so gibt es zwei Punkte Q_1, Q_2 von A derart, daß ein Punkt $Q\,(Q \neq Q_1,\ Q \neq Q_2)$ der Strecke $\overline{Q_1 Q_2}$ der Menge A nicht angehört. Wegen der Abgeschlossenheit von A können nun in der Nähe von Q_1 bzw. Q_2 zwei Punkte P_1 bzw. P_2 von A_* so gefunden werden, daß die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ einen Punkt P enthält, derart, daß eine (offene) Kugel S_P^δ vom Radius $\delta > 0$ um P keinen Punkt von A enthält. Man kann im folgenden ohne weiteres annehmen, daß P_1, P_2 auf der x_1-Achse liegen. Jetzt wähle man $0 < r < \delta$ und so, daß

$$L(A \cap S_{P_1}^r) \geq (1 - \varepsilon)\,|S_{P_1}^r|, \qquad L(A \cap S_{P_2}^r) \geq (1 - \varepsilon)\,|S_{P_2}^r|$$

mit einem $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ wird. Wir behaupten: Die Gesamtheit aller $x\,(-r < x < r)$ für die $\overline{(A^x)}_*$ nicht konvex ist, hat ein inneres (lineares Lebesguesches) Maß $m > 0$. In der Tat wird wegen

$$L_{n-1}\big(\overline{(A^x)}_* \cap S_{P_k}^r\big) = L_{n-1}(A^x \cap S_{P_k}^r) \qquad (k = 1, 2)$$

unter Heranziehung des klassischen Fubinischen Satzes

$$\int_{-r}^{r} L_{n-1}\big(\overline{(A^x)}_* \cap S_{P_k}^r\big)\,dx \geq (1 - \varepsilon)\,|S_{P_k}^r|. \tag{6.1}$$

Hätte nun die Teilmenge E_r von $-r < x < r$, auf der *beide* Größen $L_{n-1}\big(\overline{(A^x)}_* \cap S_{P_k}^r\big)$ positiv sind, das Maß $m = 0$, so würde daraus durch Addition der beiden Ungleichungen die Ungleichung

$$|S_P^r| \geq 2(1 - \varepsilon)\,|S_P^r| \tag{6.2}$$

folgen, die offenbar falsch ist. E_r hat also ein positives Maß und zugleich die Eigenschaft, daß $\overline{(A^x)}_*\,(x \in E_r)$ nicht konvex ist. Das widerspricht aber der Voraussetzung, daß fast überall in $(\alpha_{A_*}, \beta_{A_*})$ die Größe $D_{n-1}(x)$ verschwindet und somit dort $\overline{(A^x)}_*$ konvex ausfällt. Die Menge $\overline{(A_*)}$ ist also konvex.

Man setze jetzt voraus, A erfüllt die Bedingung, daß $\bar{A} - \overline{(A_*)}$ entweder leer ist, oder die in der Bedingung 2. von 2. festgelegte Eigenschaft hat, daß ihre Projektion auf eine gewisse Ebene H_{n-1} [die man außerhalb $\overline{(A_*)}$ annehmen kann] mindestens einen inneren Dichtepunkt hat. Man verschiebe die Punktmenge B so, daß die Gerade α durch den Nullpunkt O des Koordinatensystems, die senkrecht auf H_{n-1} steht, einen Durchschnitt $\mathfrak{D}$ mit $\overline{B}_*$ von positivem linearem Maß $L_1(\mathfrak{D})$ aufweist. Das ist stets möglich, da $L(\overline{B}_*) > 0$ gilt. Nun beachte man, daß bei genügend kleinem $\varepsilon_0 > 0$ die Projektion der Menge $\bar{A} - \overline{(A_*)}^{\varepsilon_0}$ auf H_{n-1} ebenfalls mindestens einen inneren Dichtepunkt (in bezug auf H_{n-1}) aufweist und insofern hat diese für $h < \varepsilon_0/2$ ein positives $(n-1)$-dimensionales Maß K. Bildet man also $\bar{A} + h B_*$, so hat diese Punkt-

menge ein (inneres) Lebesguesches Maß $L_*(\bar{A}-hB_*)$, das gewiß nicht kleiner als $KL_1(\mathfrak{D})+L_*(\overline{(A_*)}+hB_*)$ sein kann. Daraus ergibt sich aber

$$M(\bar{A}\,|\,B_*)\geq M\left(\overline{(A_*)}\,|\,B_*\right)+KL_1(\mathfrak{D}),$$

also $M(\bar{A}\,|\,B_*)>M\left(\overline{(A_*)}\,|\,B_*\right)$ gegen die Voraussetzung.

Ist nun $A\in\mathfrak{E}$, so kann $\bar{A}-\overline{(A_*)}$ nur leer sein und somit muß [wegen $L(\bar{A})=L\overline{(A_*)}$] $\bar{A}$ konvex und $\bar{A}-A$ höchstens eine Nullmenge sein. Das beweist die Behauptung für A.

Somit ist gezeigt worden, daß A ein konvexer Körper sein muß, und folgendes Teilresultat wurde gewonnen:

Sind A, B zwei Extremalpunktmengen der Klasse $\mathfrak{E}$, so muß $\bar{A}$ ein konvexer Körper sein, aus dem man höchstens eine Nullmenge herausgenommen hat.

Nun ist, wie man leicht sieht, falls $\bar{A}$ konvex ist und $L(\bar{A})=L(A)$, mit (A, B) auch $(A_*, \overline{(B_*)})$ ein Extremalpaar. Man schreibe also wieder B für $\overline{(B^*)}$, und nehme an, daß $\overline{(B^x)}_*$ fast überall auf der Punktmenge X_1 wo $L_{n-1}((B^x)_*)=L_{n-1}\overline{((B^x)_*)}>0$ ist, konvex ist. Es wird behauptet: B ist konvex. Ist dies nämlich nicht der Fall, so gibt es zwei Punkte P_1, P_2 von B, auf die man die vorherigen für A durchgeführten Überlegungen anwendet. Man projiziere die Kugeln $S^r_{P_1}$ und $S^r_{P_2}$ auf die Ebene $x_1=0$ und bezeichne mit T_k $(k=1, 2)$ die Teilmengen des Intervalls $-r<x<r$, für die

$$L_{n-1}\left(\overline{(B^x)}_*\cap S^r_{P_k}\right)>0 \qquad (k=1,2) \tag{6.3}$$

gilt. Hat nun der Durchschnitt $T=T_1\cdot T_2$ das Maß $m=0$, so erhält man aus (6.1), geschrieben für die Menge $\overline{B}_*$, den aus (6.2) fließenden Widerspruch. Hieraus folgt leicht, mit Rücksicht darauf, daß die x-Richtung willkürlich ist, daß $\overline{(B^*)}$ konvex ist.

Sind nun A und B konvexe Körper, so müssen sie auch homothetisch sein. Das folgt aus den klassischen Arbeiten von Minkowski. Am einfachsten beweist man diese Behauptung indem man in der Überlegung von 4. B durch hB $(h>0)$ ersetzt. Ferner beachte man, daß dann $D(x\,|\,\tau)$ gleich

$$\prod_1^n\left\{\frac{g^A_{k-1}}{g^A_k}+h\,\frac{g^B_{k-1}}{g^B_k}\right\}\geq\left\{(g^A_0)^{1/n}+h\,(g^B_0)^{1/n}\right\}^n \tag{6.4}$$

wird.

Man setze jetzt hier $A_k=g^A_{k-1}/g^A_k$, $B_k=g^B_{k-1}/g^B_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ und bilde $M(A\,|\,B)$. Es wird nach leichten Rechnungen

$$M(A\,|\,B)\geq\int_{T_0}\left\{\sum_{(\nu_1\ldots\nu_n)}A_{\nu_1}B_{\nu_2}\ldots B_{\nu_n}\right\}d\tau_1\ldots d\tau_n,$$

sobald $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ eine zyklische Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ bedeutet. Wie man feststellt, gilt

$$\sum_{(\nu_1\ldots\nu_n)}A_{\nu_1}B_{\nu_2}\ldots B_{\nu_n}\geq(g^A_0)^{1-\frac{1}{n}}\,(g^B_0)^{\frac{1}{n}} \tag{6.5}$$

und das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn $A_k = q B_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ mit einer von k unabhängigen Funktion $q = q(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Somit fallen (für konvexe A, B) die Extremalpunktmengen von (6.5) mit den Extremalpunktmengen der Brunn-Minkowskischen Ungleichung zusammen. Nun kann durch Multiplikation der Gleichungen $A_k = q B_k$ miteinander nachgewiesen werden, daß $q^n = |A| : |B|$, d.h. eine Konstante ist. Wählt man also von vornherein $|A| = |B|$, so artet die Brunn-Minkowski-Schmidtsche Abbildung (sofern man noch den Schwerpunkt von A und B in den Nullpunkt legt) in die identische Abbildung aus.

Man nehme jetzt an $\overline{B} - \overline{(B_*)}$ $\left(\overline{(B_*)}\right.$ konvex!$\left.\right)$ sei nicht leer und bezeichne mit P einen Punkt von $\overline{B} - \overline{(B_*)}$. Wir beziehen die beiden Punktmengen $\bar{A}$ und $\overline{B}$ auf ihren gemeinsamen Schwerpunkt G und konstruieren die größte Kugel S_G um G, die Platz in $\bar{A}$ findet. Man bilde jetzt $\bar{A} + h\overline{B}$ und beachte, daß diese Punktmenge die Menge $(\bar{A} + h\overline{B}_*) + hP$ enthält. Da $\bar{A}$, $\overline{(B_*)}$ konvexe, homothetische Punktmengen sind, so enthält letztere Punktmenge die Vereinigung von $(\bar{A} + h\overline{B}_*)$ und einer Punktmenge V_h, die man dadurch erhält, indem man die Vereinigung aller zur $h\,\overline{GP}$ äquipollenten Strecken $h\,\overline{G'P'}$ mit $G' \in \bar{A}$ bildet. Bezeichnet dann d den Radius von S_G, so gilt, wie man leicht sieht, die Abschätzung

$$L(A_* + h\overline{B}) \geq (|A|^{1/n} + h|\overline{(B_*)}|^{1/n})^n + K h d^{n-1},$$

mit einem positiven von h unabhängigen K. Diese Ungleichung zeigt aber, daß $\overline{B}$ keine Extremalpunktmenge sein kann. Diese Überlegung zeigt zugleich, daß man die Bedingungen für die Punktmengen B bei weitem schärfer fassen kann, als diejenigen für die Punktmengen A.

Will man das Erreichte zusammenfassen, so kann man das Ergebnis folgendermaßen formulieren:

Man definiere innerhalb der Gesamtheit $\mathfrak{E}^*$ aller nichtleeren beschränkten Teilmengen von E^n zwei Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{E}^*$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Es gilt $L_*(A) = V_{\mathfrak{A}} > 0$ $(A \in \mathfrak{A})$ und $L_*(B) = V_{\mathfrak{B}} > 0$ $(B \in \mathfrak{B})$ mit vorgegebenen $V_{\mathfrak{A}}$, $V_{\mathfrak{B}}$.

2. Ist $A \in \mathfrak{A}$, so gibt es eine Hyperebene H_{n-1} von E^n derart, daß die Projektion von $\bar{A} - \overline{(A_*)}$ auf H_{n-1} ein positives $(n-1)$-dimensionales Maß hat, oder, was dasselbe ist, mindestens einen inneren Dichtepunkt aufweist.

Dann gilt folgendes:

1. *Die Größe*

$$J_0 = \inf\{M(A|B) \,|\, A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}\}$$

ist gleich $V_{\mathfrak{A}}^{1-\frac{1}{n}} V_{\mathfrak{B}}^{\frac{1}{n}}$.

2. *Es gilt stets*

$$M(A|B) > V_{\mathfrak{A}}^{1-\frac{1}{n}} V_{\mathfrak{B}}^{\frac{1}{n}}$$

sofern $\bar{A}$ $(A \in \mathfrak{A})$ *und* $\overline{B}$ *nicht beide konvexe, homothetische Körper sind.*

Daß nun innerhalb der Klasse $\mathfrak{E}^*$ $M(A \mid B) = V_A^{1-\frac{1}{n}} \cdot V_B^{\frac{1}{n}}$ dann und nur dann gilt, falls A und B konvexe Punktmengen sind, von denen man höchstens eine Nullmenge entfernt hat, folgt in Verbindung mit der bewiesenen Notwendigkeit dieser Bedingung ohne weiteres, wenn man dazu die Tatsache berücksichtigt, daß letztere Bedingung (trivialerweise) auch hinreichend ist.

Zum Schluß möchte ich Herrn Dr. Walter Felscher für kritische Durchsicht des druckfertigen Manuskripts und Herrn Dr. W. Jehne und Herrn Dr. H. Pachale für kritische Hilfe beim Lesen der Korrekturen meinen Dank aussprechen.

Berlin-Dahlem, Mathematisches Institut der Freien Universität

(Eingegangen am 17. Februar 1957)

Nitsche, J.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 316–324 (1957)

Über die isolierten Singularitäten der Lösungen von $\Delta u = e^u$*)

Von

Johannes Nitsche

Wenn die Lösung $u(x,y)$ einer elliptischen Differentialgleichung in der Umgebung eines Punktes, aber mit Ausnahme desselben, definiert und eindeutig ist, so kann man ohne weitere Information recht wenig über das singuläre Verhalten von $u(x,y)$ bei Annäherung an diesen Punkt sagen. Es gibt aber bemerkenswerte Beispiele nicht-linearer Differentialgleichungen, bei denen das doch möglich ist, wo also, auf Grund der Elliptizität und auf Grund des hinreichend nicht-linearen Charakters, schon die Voraussetzung der Eindeutigkeit allein die Möglichkeiten für die Lösungen stark beschneidet, und zwar ohne daß eine Beschränktheitsforderung ins Spiel käme. Wie Bers in [1] gezeigt hat, gibt es keine isolierten Singularitäten eindeutiger Lösungen der Minimalflächengleichung, die nicht hebbar wären, und dasselbe trifft für eine größere Klasse quasilinearer Differentialgleichungen zu, s. Finn [3]. Eine in der Umgebung des Unendlichen eindeutige Lösung der Differentialgleichung $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 1$ hat die asymptotische Darstellung

$$u(x,y) = \tfrac{1}{2} Q(x,y) + A x + B y + C \log |Q(x,y)| + O(1),$$

wo

$$Q(x,y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2, \qquad a c - b^2 = 1,$$

s. Joergens [6]. Ähnliche Resultate sind von Finn und Gilbarg für die Differentialgleichung einer Gasströmung hergeleitet worden, s. [4].

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ von dem beschriebenen Gesichtspunkte aus. $\Delta u = e^u$ bedeutet, daß die Fläche mit dem Linienelement $ds^2 = e^{u(x,y)} \cdot (dx^2 + dy^2)$ die konstante Gaußsche Krümmung $K = -\frac{1}{2}$ besitzt. Auch ist es in der Theorie der konformen Abbildung wohlbekannt[1]), daß der Logarithmus des achtfachen hyperbolischen Abbildungsmoduls diese Differentialgleichung befriedigt, und so ist im Anschluß an eine Preisaufgabe von H. A. Schwarz [11] die Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ im Zusammenhang mit dem Uniformisierungsproblem algebraischer Riemannscher Flächen von Picard [9], Poincaré [10], Bieberbach [2] u. a. eingehend studiert worden. Die dabei auftretenden Singularitäten, welche den Verzweigungspunkten entsprechen, sind spezielle Fälle der durch die Forderung der Eindeutigkeit ausgesonderten. Es besteht auch eine Beziehung zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Der hyperbolische Abbildungsmodul

*) Diese Arbeit ist vorbereitet worden unter Contract N onr – 710 (16) zwischen der Universität von Minnesota und dem Office of Naval Research.

[1]) Siehe z. B. Poincaré [10]; Fricke [5], insbes. S. 452–453. Bieberbach [2].

erscheint dann als Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen. Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ sind subharmonische Funktionen. Während man aber aus dieser Tatsache lediglich eine Ähnlichkeit mit den harmonischen Funktionen — Lösungen einer linearen Differentialgleichung — schließen kann, lassen sich im vorliegenden Falle viel präzisere „Voraussagen" über die mögliche Form der Singularitäten machen.

Unter Benutzung der oben angegebenen Zusammenhänge und einiger Eigenschaften gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Singularitäten wird hier, im wesentlichen in unserem Hilfssatz 3, der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. *Die reellwertige Funktion $u(x,y)$ sei in der punktierten Kreisscheibe $0<x^2+y^2\leq r^2$ zweimal stetig differenzierbar und dort Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Dann ist $u(x,y)$ entweder auch noch im Nullpunkte regulär, oder es hat eine der beiden Darstellungen*

$$\text{I)}\quad u(x,y) = (K-1)\log(x^2+y^2) + \Phi(x,y), \qquad K>0;$$

$$\text{II)}\quad u(x,y) = -\log(x^2+y^2) - 2\log\left|\log(x^2+y^2)\right| + \Psi(x,y).$$

Die Funktionen $\Phi(x,y)$ und $\Psi(x,y)$ sind in $x^2+y^2\leq r^2$ stetig und in $0<x^2+y^2\leq r^2$ reell-analytisch. Bei Annäherung an den Nullpunkt gilt (mit $\varrho^2 = x^2+y^2$)

$$\Phi_x, \Phi_y = O(\varrho^{2K-1}); \qquad \Phi_{xx}, \Phi_{xy}, \Phi_{yy} = O(\varrho^{2K-2});$$
$$\Psi_x, \Psi_y = O\left(\varrho^{-1}\left|\log^{-2}\varrho\right|\right); \qquad \Psi_{xx}, \Psi_{xy}, \Psi_{yy} = O\left(\varrho^{-2}\left|\log^{-2}\varrho\right|\right).$$

Für ganzzahliges K ist $\Phi(x,y)$ in $x^2+y^2\leq r^2$ reell analytisch. $\Psi(x,y)$ hat eine Reihendarstellung

$$\Psi(x,y) = \sum_{l,m,n\geq 0} a_{lmn}\frac{x^l y^m}{\left(\log\frac{1}{\varrho}\right)^n}.$$

Dabei gilt $a_{000} = \log 8$. Durch Einsetzen der Reihenentwicklung für $\Psi(x,y)$ in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich ergibt sich weiterhin $a_{00n} = \frac{2}{n}\cdot\gamma^n$, d.h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{00n}\frac{1}{\left(\log\frac{1}{\varrho}\right)^n} = \log 8 - 2\log\left(1-\frac{\gamma}{\log\frac{1}{\varrho}}\right).$$

Dabei ist γ eine Konstante.

Daß tatsächlich solche singulären Lösungen existieren, zeigen die Beispiele

$$u(x,y) = (K-1)\log(x^2+y^2) + 2\log\left(\frac{2\sqrt{2}K}{1-(x^2+y^2)^K}\right), \quad K>0;$$

$$u(x,y) = -\log(x^2+y^2) - 2\log\left|\log(x^2+y^2)\right| + \log 8.$$

Von der Darstellung (2) für die Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ kann man auch andere Dinge ablesen. Beispielsweise ergibt sich sehr einfach der zuerst von H. Wittich in [*12*] bewiesene Satz, daß keine „ganzen", d.h. für alle x und y zweimal stetig differenzierbare Lösungen von $\Delta u = e^u$ existieren können. Mehr, es ergibt sich der

Satz 2. *Die reellwertige Funktion $u(x,y)$ sei in $x^2+y^2<r^2$ zweimal stetig differenzierbar und dort Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Es sei $u(0,0)=\log\alpha$. Dann gilt die Ungleichung*

$$r \leq \sqrt{\frac{8}{\alpha}}.$$

Diese Schranke ist mit allgemeineren Methoden kürzlich von OSSERMAN [8] angegeben worden. Sie kann nicht verbessert werden, wie das Beispiel der Lösung

$$u(x,y) = \log\alpha - 2\log\left\{1 - \frac{\alpha}{8}(x^2+y^2)\right\}$$

zeigt.

Wir beginnen nunmehr mit dem Beweis des Satzes 1. Der Einfachheit halber werden wir uns jetzt statt der Variablen x und y der Variablen $z=x+iy$ und $\bar{z}=x-iy$ bedienen.

Hilfssatz 1. *Die reellwertige Funktion $u(z,\bar{z})$ sei in $|z-z_0|\leq r$ zweimal stetig differenzierbar und dort Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Dann ist der Ausdruck $q(z)=\frac{1}{2}u_{zz}-\frac{1}{4}u_z^2$ eine in $|z-z_0|\leq r$ regulär-analytische Funktion der Variablen z[2]. $u(z,\bar{z})$ ist durch die Werte $u(z_0,\bar{z}_0)$ und $u_z(z_0,\bar{z}_0)$ und durch die Funktion $q(z)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wegen $\Delta u = 4u_{z\bar{z}}$ hat man

$$q_{\bar{z}} = \frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial z}(\Delta u) - \frac{1}{8}u_z \Delta u = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial z}e^u - u_z e^u\right) = 0.$$

Daher ist $q(z)$ eine regulär-analytische Funktion von z. Der zweite Teil der Behauptungen kann durch vollständige Induktion bewiesen werden und wird hier übergangen.

Hilfssatz 2. *Die reellwertige Funktion $u(z,\bar{z})$ sei in $|z-z_0|\leq r$ zweimal stetig differenzierbar und dort Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Es sei*

$$u(z_0,\bar{z}_0)=\log\alpha \quad (\alpha>0), \qquad u_z(z_0,\bar{z}_0)=\beta+i\gamma, \qquad \tfrac{1}{2}u_{zz}-\tfrac{1}{4}u_z^2 = q(z).$$

$\omega_1(z)$ und $\omega_2(z)$ seien die zwei linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + q(z)\,\omega = 0, \tag{1}$$

welche den Anfangsbedingungen

$$\omega_1(z_0)=1, \quad \omega_1'(z_0) = -\frac{1}{2}(\beta+i\gamma); \quad \omega_2(z_0)=0, \quad \omega_2'(z_0) = \sqrt{\frac{\alpha}{8}}$$

genügen. Dann gilt in $|z-z_0|\leq r$ die Darstellung

$$u(z,\bar{z}) = \log\alpha - 2\log\left\{|\omega_1(z)|^2 - |\omega_2(z)|^2\right\}. \tag{2}$$

[2]) Siehe POINCARÉ [10], S. 229; BIEBERBACH [2], S. 183.

Beweis. Es werde die Abkürzung $Q(z,\bar{z}) = |\omega_1|^2 - |\omega_2|^2$ eingeführt und fürs erste $v(z,\bar{z}) = \log\alpha - 2\log Q(z,\bar{z})$ gesetzt. Auf Grund der Anfangsbedingungen ist $Q(z,\bar{z})$ sicherlich in einer Kreisscheibe $|z-z_0| \leq r_1 \leq r$ positiv. Dort gilt dann $\Delta v = e^v$ und $v(z_0,\bar{z}_0) = \log\alpha$, $v_z(z_0,\bar{z}_0) = \beta + i\gamma$, $\frac{1}{2}v_{zz} - \frac{1}{4}v_z^2 = q(z)$, wie man durch Verifizieren bestätigt, und daher ist $u \equiv v$ in $|z-z_0| \leq r_1$. Wegen der Eindeutigkeit der durch die Anfangsbedingungen und die Funktion $q(z)$ bestimmten Lösung ist es aber auch nicht möglich, daß $Q(z,\bar{z})$ irgendwo in $|z-z_0| \leq r$ verschwindet. Daher kann man $r_1 = r$ annehmen, w. z. b. w.

Es seien $u_1(z,\bar{z})$ und $u_2(z,\bar{z})$ zwei in $0<|z| \leq r$ zweimal stetig differenzierbare reellwertige Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. $u_1(z,\bar{z})$ sei in $0<|z| \leq r$ eindeutig, und in einem einfach zusammenhängenden Teilgebiet dieser punktierten Kreisscheibe mögen u_1 und u_2 übereinstimmen. Dann muß in $0<|z| \leq r$ auch u_2 eindeutig sein und $u_1 \equiv u_2$ gelten. — Nunmehr sei die reellwertige Funktion $u(z,\bar{z})$ in $0<|z| \leq r$ zweimal stetig differenzierbar, eindeutig und Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Dann ist der Ausdruck $q(z) = \frac{1}{2}u_{zz} - \frac{1}{4}u_z^2$ eine in $0<|z| \leq r$ eindeutige regulär-analytische Funktion der Variablen z.

Hilfssatz 3. Voraussetzungen: *Die Funktion $q(z)$ sei in der punktierten Kreisscheibe $0<|z| \leq r$ eindeutig und regulär-analytisch. $w_1(z)$ und $w_2(z)$ seien zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung*

$$\frac{d^2w}{dz^2} + q(z)\,w = 0, \tag{3}$$

und die reellwertige Funktion $Q(z,\bar{z}) = |w_1(z)|^2 - |w_2(z)|^2$ sei positiv und eindeutig in $0<|z| \leq r$.

Behauptungen: *Dann muß $z=0$ eine Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung (3) sein*[3]*, und die Funktion $\log Q(z,\bar{z})$ ist entweder in $|z| \leq r$ reell-analytisch oder hat dort eine der beiden Formen*

I) $\log Q(z,\bar{z}) = (1-K)\log|z| + \Phi(z,\bar{z}), \quad K>0;$

II) $\log Q(z,\bar{z}) = \log|z| + \log|\log|z|| + \Psi(z,\bar{z}).$

Die Funktionen $\Phi(z,\bar{z})$ und $\Psi(z,\bar{z})$ sind in $|z| \leq r$ stetig und in $0<|z| \leq r$ reell-analytisch. Bei Annäherung an den Nullpunkt gilt

$$\Phi_z, \Phi_{\bar{z}} = O\left(|z|^{2K-1}\right); \qquad \Phi_{zz}, \Phi_{z\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}\bar{z}} = O\left(|z|^{2K-2}\right);$$

$$\Psi_z, \Psi_{\bar{z}} = O\left(|z|^{-1}|\log^{-2}|z||\right); \qquad \Psi_{zz}, \Psi_{z\bar{z}}, \Psi_{\bar{z}\bar{z}} = O\left(|z|^{-2}\cdot|\log^{-2}|z||\right).$$

Beweis. Falls $q(z)$ auch im Punkte $z=0$ regulär-analytisch ist, kann man w_1 und w_2 in der Form

$$w_1(z) = a + bz + \cdots, \qquad w_2(z) = c + dz + \cdots; \qquad b \geq 0,\ d \geq 0,\ ad - bc \neq 0$$

[3]) Das bedeutet beiläufig, daß die Funktion $q(z) = \frac{1}{2}u_{zz} - \frac{1}{4}u_z$ bei $z=0$ höchstens einen Pol zweiter Ordnung besitzen kann.

annehmen. Dabei muß $|a|>|c|$ sein; denn im Falle $|a|=|c|$ würde Q auf einer Kurve durch den Ursprung verschwinden. Daher gilt

$$Q(z,\bar{z}) = \{|a|^2 - |c|^2\} + 2\,\Re\{(a\,b - c\,d)\,\bar{z}\} + \cdots,$$

und $\log Q(z,\bar{z})$ ist eine in $|z|\leqq r$ reell-analytische Funktion.

Falls $q(z)$ im Punkte $z=0$ eine Singularität besitzt, so existiert ein Fundamentalsystem $\omega_1(z), \omega_2(z)$ von Lösungen von (3), welches bei einmaligem Umlauf der Singularität eine der beiden Umlaufssubstitutionen erfährt:

$$\omega_1^{(1)} = \varrho_1\omega_1, \quad \omega_2^{(1)} = \varrho_2(\varepsilon\omega_1 + \omega_2). \tag{4}$$

ε ist entweder Null (logarithmenfreier Fall) oder Eins (logarithmischer Fall). Im Falle $\varepsilon=1$ stimmen ϱ_1 und ϱ_2 überein. Aus (4) folgt dann bekanntlich

$$\omega_1(z) = z^{\varkappa_1}\psi_1(z), \quad \omega_2(z) = z^{\varkappa_2}\left\{\frac{\varepsilon}{2\pi i}\,\psi_1(z)\,\log z + \psi_2(z)\right\}, \quad 0\leqq \Re\,\varkappa_j < 1. \tag{5}$$

Dabei ist $\varrho_j = e^{2\pi i\varkappa_j}$ gesetzt, und die $\psi_j(z)$ bedeuten in $0<|z|\leqq r$ eindeutige regulär-analytische Funktionen (Laurentreihen). Die beiden im Hilfssatz 3 erscheinenden Lösungen stellen sich als Linearkombinationen $w_1 = a\omega_1 + b\omega_2$, $w_2 = c\omega_1 + d\omega_2$, $ad - bc \neq 0$ dar. Mit Rücksicht auf die zu beweisenden Behauptungen kann von vornherein $b\geqq 0$, $d\geqq 0$ angenommen werden. Man wähle nun einen beliebigen Punkt z in $0<|z|\leqq r$, am besten einen, für den $\omega_1\neq 0$ und $\omega_2\neq 0$ ausfällt, und man vergleiche den Wert der Funktion $Q(z,\bar{z})$ mit dem Wert $Q^{(n)}(z,\bar{z})$, welchen sie nach n-maligem Umlaufen des Nullpunktes annimmt. Es sei noch bemerkt, daß der Quotient $\omega(z) = \frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$ wegen $\omega'(z) = (\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1')\cdot\omega_1^{-2} = \frac{\Omega}{\omega_1^2(z)}$ eine Umgebung des Punktes z schlicht abbildet. Ω steht dabei für die konstante Wronskische Determinante.

I. Zunächst werde der Fall $\varepsilon = 0$ ins Auge gefaßt. Mit den Abkürzungen

$$\varrho_j = R_j e^{i\Theta_j}, \quad (a\,b - c\,d)\,\omega_1\bar{\omega}_2 = R\,e^{i\Theta} \tag{6}$$

ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} Q^{(n)} - R_1^{2n}\left(|a|^2 - |c|^2\right)|\omega_1|^2 + 2R\,R_1^n R_2^n \cos\left[\Theta + n(\Theta_1 - \Theta_2)\right] + \\ + R_2^{2n}\left(b^2 - d^2\right)|\omega_2|^2. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Hier sind nun einige weitere Unterscheidungen vorzunehmen.

I.1. $a\,b - c\,d = 0$ d.h. $R=0$. Wegen $ad - bc\neq 0$ muß dann $a\neq c$ und $b\neq d$ sein. Aus der Forderung $Q^{(n)} = Q$ folgt daher $R_1 = R_2 = 1$ d.h. $\Im\mathrm{m}\,\varkappa_j = 0$. Ist nun $b>d$ (also insbesondere $b\neq 0$), so gilt $a = \frac{c\,d}{b}$ und

$$Q = \frac{b^2 - d^2}{b^2}\left\{b^2|\omega_2|^2 - |c|^2|\omega_1|^2\right\}. \tag{8}$$

$\omega_2(z)$ kann in $0<|z|\leqq r$ keine Nullstelle haben, und der Quotient $\left|\frac{\omega_1(z)}{\omega_2(z)}\right| = |z|^{\varkappa_1-\varkappa_2}\left|\frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)}\right|$ muß in $0<|z|\leqq r$ kleiner als $\frac{b}{|c|}$ bleiben. Somit erhält man eine

Beziehung $\psi_1(z) = \psi_2(z)\,\mathfrak{P}(z)$ wobei $\mathfrak{P}(z) \sum_{m=M}^{\infty} \alpha_m z^m$ ist und $\alpha_M \neq 0$. Es werde $z^{\varkappa_1-\varkappa_2}\mathfrak{P}(z) = \mathfrak{R}(z)$ gesetzt. Dann muß $K = \varkappa_1 - \varkappa_2 + M \geq 0$ sein. Für die konstante Wronskische Determinante findet man den Ausdruck

$$\Omega = -\omega_2^2(z)\,\mathfrak{R}'(z),$$

so daß natürlich die Summe $\varkappa_1 + \varkappa_2$ eine ganze Zahl sein muß. $Q(z,\bar{z})$ erhält dann die Gestalt

$$(9) \qquad Q(z,\bar{z}) = |\Omega|\,\frac{|c|^2(b^2-d^2)}{b^2}\cdot\frac{1}{|\mathfrak{R}'(z)|}\left\{\frac{b^2}{|c|^2} - |\mathfrak{R}(z)|^2\right\}.$$

Es gibt jetzt zwei Möglichkeiten:

I. 11. $K = \varkappa_1 - \varkappa_2 + M$ ist eine ganze Zahl. Da $|\mathfrak{R}(0)| < \frac{b}{|c|}$ sein muß, ist dann der Ausdruck $\log\left\{\frac{b^2}{|c|^2} - |\mathfrak{R}(z)|^2\right\}$ eine in $|z| \leq r$ reell-analytische Funktion, und für $\log Q(z,\bar{z})$ ergibt sich

$$(10) \qquad \log Q(z,\bar{z}) = -k\log|z| + \Phi(z,\bar{z}).$$

$\Phi(z,\bar{z})$ steht für eine in $|z| \leq r$ reell-analytische Funktion. k ist eine nichtnegative ganze Zahl.

I. 12. Es ist $K = \varkappa_1 - \varkappa_2 + M > 0$ und keine ganze Zahl. Dann ergibt sich $\mathfrak{R}(z) = \alpha_M z^K(1+\cdots)$ und $\mathfrak{R}'(z) = K\alpha_M z^{K-1}(1+\cdots)$. Die Funktion $\log Q(z,\bar{z})$ wird zu

$$(11) \qquad \log Q(z,\bar{z}) = (1-K)\log|z| + \Phi(z,\bar{z}).$$

$\Phi(z,\bar{z})$ ist jetzt in $|z| \leq r$ stetig und in $0 < |z| \leq r$ reell-analytisch. Bei Annäherung an den Nullpunkt gilt

$$\Phi_z, \Phi_{\bar{z}} = O\left(|z|^{2K-1}\right); \qquad \Phi_{zz}, \Phi_{z\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}\bar{z}} = O\left(|z|^{2K-2}\right).$$

I. 2. $R \neq 0$. Zunächst werde weiterhin noch zusätzlich angenommen:

I. 21. $R_1 = R_2$. Folglich ist $R_1 = R_2 = 1$. Dann muß $\cos[\Theta + n(\Theta_1 - \Theta_2)] = \cos\Theta$ gelten für alle ganzen Zahlen n und mehr noch, nämlich im Hinblick auf die Schlichtheit von $\frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$, für alle Werte von Θ in der Nachbarschaft seines Ausgangswertes. Daraus ergibt sich $\Theta_1 - \Theta_2 = m \cdot 2\pi$, d.h. $\varrho_1 = \varrho_2$. In diesem Falle ist das Fundamentalsystem $\omega_1(z), \omega_2(z)$ nicht eindeutig bestimmt, und man kann von vornherein $b = c = 0$, $a = d = 1$ annehmen. Wegen $Q > 0$ muß dann aber $\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right| = \left|\frac{\psi_2}{\psi_1}\right| < 1$ und daher $\psi_2(z) = \psi_1(z)\,\mathfrak{P}(z)$ bzw. $\omega_2(z) = \omega_1(z)\,\mathfrak{P}(z)$ gelten, $\mathfrak{P}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m z^m$. Es ist $\Omega = \omega_1^2(z)\,\mathfrak{P}'(z)$ und folglich

$$(12) \qquad Q(z,\bar{z}) = |\Omega| \cdot |\mathfrak{P}'(z)|^{-1}\left\{1 - |\mathfrak{P}(z)|^2\right\}.$$

Somit ergibt sich am Ende wie im Falle I. 11

$$(13) \qquad \log Q(z,\bar{z}) = -k\log|z| + \Phi(z,\bar{z}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

I. 22. $R_1 \neq R_2$. Es sei etwa $R_1 > R_2$. Dann muß $|a| \geqq |c|$ sein. Falls $|a| > |c|$ ist, müssen $R_1 = 1$ und $b = d$ sein. Dann ergibt sich die Bedingung $R_2^n \cdot \cos[\Theta + n(\Theta_1 - \Theta_2)] = \cos\Theta$, welche wegen $R_2 < 1$ zur Folge hätte, daß Θ von der Form $\Theta = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ ist. Das steht aber nicht im Einklang mit der Schlichtheit der Funktion $\frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$. Falls andererseits $|a| = |c|$ gilt, so muß entweder $R_2 = 1$ oder $b = d$ sein. $R_2 = 1$ führt wie eben auf einen Widerspruch. Bleibt also noch die Möglichkeit $b = d$ zu erledigen. Hier folgt aus der Bedingung $R_1^n R_2^n \cos[\Theta + n(\Theta_1 - \Theta_2)] = \cos\Theta$, daß $R_1 \cdot R_2 = 1$ und $\Theta_1 - \Theta_2 = m \cdot 2\pi$ sein müssen, d.h. $\varrho_1 \bar{\varrho}_2 = 1$ bzw. $\varkappa_2 = \bar{\varkappa}_1$. $Q(z, \bar{z})$ hat die Gestalt

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} Q(z,\bar{z}) &= b \cdot \{(a-c)\,\omega_1\bar{\omega}_2 + (\bar{a}-\bar{c})\,\bar{\omega}_1\omega_2\} \\ &= b\,|\psi_2|^2\left\{(a-c)e^{2\varkappa_1 \cdot \log|z|}\left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right) + (\bar{a}-\bar{c})\,e^{2\bar{\varkappa}_1 \log|z|}\left(\overline{\frac{\psi_1}{\psi_2}}\right)\right\} \\ &= 2b\,|\psi_2(z)|^2 \cdot |z|^{2\varkappa_1'} \cdot \mathfrak{Re}\left\{(a-c)\,e^{2i\varkappa_1'' \log|z|} \cdot \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Dabei ist $\varkappa_1 = \varkappa_1' + i\varkappa_1''$ geschrieben. Man setze $(a-c)\frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)} = \psi(z)$. Es wird nun behauptet, daß die Bedingung $Q > 0$ in $0 < |z| \leqq r$ auf einen Widerspruch führt. Zum Beweise dafür bedenke man, daß $\psi(z)$ in $0 < |z| \leqq r$ nirgends verschwindet und daß sich das Argument von $\psi(z)$ beim Umlauf um $z = 0$ auf einem Kreise $|z| = \text{const.}$ um weniger als π und daher also gar nicht ändern kann. Daher ist auch die Funktion $\varphi(z) = \log\psi(z)$ eindeutig in $0 < |z| \leqq r$ und $\psi(z) = e^{\varphi(z)}$. Aus $Q > 0$ folgt die Bedingung $\cos[2\varkappa_1'' \log|z| + \mathfrak{Im}\,\varphi(z)] > 0$, welche auf Grund der Stetigkeit des Ausdruckes in der eckigen Klammer unerfüllbar ist, ob nun $\varphi(z)$ bei $z = 0$ eine wesentliche oder eine außerwesentliche Singularität besitzt. (Wegen $R_1 \neq R_2$ ist $\varkappa_1'' \neq 0$.)

II. Nunmehr kommen wir zum Falle $\varepsilon = 1$. Man erhält hier

$$(15)\qquad Q^{(n)} = |\varrho|^{2n}\{|(a\omega_1 + b\omega_2) + n\,b\,\omega_1|^2 - |(c\,\omega_1 + d\,\omega_2) + n\,d\omega_1|^2\}.$$

Daher müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein: $|\varrho| = 1$ d.h. $\mathfrak{Im}\,\varkappa = 0$, $b = d$ und $\mathfrak{Re}\,a = \mathfrak{Re}\,c$. $Q(z, \bar{z})$ besitzt demgemäß die Gestalt

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} Q(z,z) = |z|^{2\varkappa}\Big\{&\Big|\Big(a + \frac{b}{2\pi i}\log z\Big)\psi_1 + b\,\psi_2\Big|^2 - \\ &- \Big|(c-a)\,\psi_1 + \Big(a + \frac{b}{2\pi i}\log z\Big)\psi_1 + b\,\psi_2\Big|^2\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Weder $\psi_1(z)$ noch die Funktion $\left(a + \frac{b}{2\pi i}\log z\right)\psi_1(z) + b\,\psi_2(z)$ können in $0 < |z| \leqq r$ Nullstellen haben, und es ergibt sich die Ungleichung

$$(17)\qquad \left|\frac{(c-a)}{a + b\frac{\psi_2(z)}{\psi_1(z)} + \frac{b}{2\pi i}\log z} + 1\right| < 1,$$

welche für sämtliche Zweige des Logarithmus ihre Gültigkeit behält. Der Quotient $\frac{\psi_2(z)}{\psi_1(z)}$ muß aber unter diesen Umständen bei $z = 0$ regulär sein. Um

das einzusehen, nehme man das Gegenteil an und betrachte die Funktion[4])

$$f(z) = z\, e^{2\pi i\left[\frac{a}{b} + \frac{\psi_2(z)}{\psi_1(z)}\right]}, \tag{18}$$

welche dann bei $z=0$ eine wesentliche Singularität hätte. Nach dem Satze von WEIERSTRASS existierte dann eine gegen $z=0$ konvergierende Punktfolge z_ν, für die $f(z_\nu)$ gegen 1 strebte. Auf dieser Punktfolge würde die Funktion $a + b\frac{\psi_2(z)}{\psi_1(z)} + \frac{b}{2\pi i}\log z = \frac{b}{2\pi i}\log f(z)$ gegen Null konvergieren, sofern nur jeweils der richtige Zweig des Logarithmus ausgewählt, d.h. sofern nur die richtige Zahl von Umläufen um $z=0$ vorgenommen wird. Das ist aber ein Widerspruch zu (17).

Es gilt also $\psi_2(z) = \psi_1(z)\,\mathfrak{P}(z)$, wo $\mathfrak{P}(z)$ eine bei $z=0$ regulär-analytische Funktion bedeutet. Damit wird $\omega_2(z)$ zu $\omega_2(z) = \left\{\mathfrak{P}(z) + \frac{1}{2\pi i}\log z\right\}\omega_1(z)$. Nun ist, wie immer, die Wronskische Determinante $\Omega = \omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'$ konstant. Das gibt

$$\Omega = \omega_1^2(z)\cdot\left\{\mathfrak{P}'(z) + \frac{1}{2\pi i z}\right\}. \tag{19}$$

Die Funktion $Q(z,\bar z)$ schreibt sich daher jetzt als

$$\left\{\begin{aligned} Q(z,z) &= |\Omega|\cdot\left|\mathfrak{P}'(z) + \frac{1}{2\pi i z}\right|^{-1}\times \\ &\quad\times\left\{a_2^2 - c_2^2 + 2b(a_2 - c_2)\left[\mathfrak{Im}\,\mathfrak{P}(z) - \frac{1}{\pi}\log|z|\right]\right\}. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Dabei ist $a = a_1 + ia_2$, $c = a_1 + ic_2$ gesetzt. Es muß $a_2 > c_2$ sein. Weiter folgt

$$\log Q(z,\bar z) = \log|z| + \log|\log|z|| + \Psi(z,\bar z). \tag{21}$$

Die Funktion $\Psi(z,\bar z)$ ist in $0<|z|\leq r$ reell-analytisch und verhält sich bei Annäherung von z an den Nullpunkt folgendermaßen:

$$\Psi_z, \Psi_{\bar z} = O\left(|z|^{-1}\cdot|\log^{-2}|z||\right); \quad \Psi_{zz}, \Psi_{z\bar z}, \Psi_{\bar z\bar z} = O\left(|z|^{-2}\cdot|\log^{-2}|z||\right). \tag{22}$$

Damit ist der Hilfssatz 3 vollständig bewiesen.

Indem man die vorangehenden Hilfssätze und Bemerkungen kombiniert, gelangt man zu unserem am Anfang der Arbeit formulierten Satz 1. Der Satz 2 wird folgendermaßen bewiesen: Gemäß Hilfssatz 2 ist die Funktion $\omega(z) = \frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$ in $|z|\leq r$ regulär-analytisch, und es gilt dort $\omega(0)=0$, $|\omega(z)|<1$. Nach dem Schwarzschen Lemma muß somit

$$|\omega'(0)| = |\Omega\cdot\omega_1^{-2}(0)| = |\Omega| = |\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'| = \sqrt{\frac{\alpha}{8}} \leq \frac{1}{r}$$

sein, w. z. b. w.

[4]) Diese Überlegung verdanke ich Herrn E. REICH.

Literatur

[1] BERS, L.: Isolated singularities of minimal surfaces. Ann. of Math. **53**, 364—386 (1951). — [2] BIEBERBACH, L.: $\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen. Math. Ann. **77**, 173—212 (1916). — [3] FINN, R.: Isolated singularities of solutions of non-linear partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 385—404 (1953). — [4] FINN, R., and D. GILBARG: Asymptotic behaviour and uniqueness of plane subsonic flows. Comm. p. appl. math. **10**, 23—63 (1957). — [5] FRICKE, R.: Automorphe Funktionen mit Einschluß der elliptischen Modulfunktionen. Enc. math. Wiss. 2 B **4**, 349—470 (1913). — [6] JOERGENS, K.: Harmonische Abbildungen und die Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. Math. Ann. **129**, 330—344 (1955). — [7] NITSCHE, J.: On the solutions of the differential equation $\Delta \Phi = \exp \Phi$. Bull. Amer. Math. Soc. **62**, 575—576 (1956). — [8] OSSERMAN, R.: On a differential inequality and conformal mapping of surfaces. Techn. Rep. 3, 1956, Stanford University. — [9] PICARD, É.: Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. J. de math. (4) **6**, 145—210 (1890). — De l'équation $\Delta u = k e^u$ sur une surface de Riemann fermée. J. de math. (4) **9**, 273—291 (1893). — De l'integration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de Riemann fermée. J. reine u. angew. Math. **130**, 243—258 (1905). — [10] POINCARÉ, H.: Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$. J. de math. (5) **4**, 137—230 (1898). — [11] SCHWARZ, H. A.: Preisaufgabe der Math.-Phys. Klasse der Königl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen für das Jahr 1891. Göttinger Nachr. **1890**, 216. — [12] WITTICH, H.: Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Math. Z. **49**, 579—582 (1944).

Dept. Math., Inst. Techn., University of Minnesota, Minneapolis 14, Minn. (U.S.A.)

(Eingegangen am 9. Mai 1957)

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, W. Magnus, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

IV. Band:

Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers

Von Dr. Erwin Madelung, o. Professor der theoretischen Physik an der Universität Frankfurt am Main. Sechste, revidierte Auflage. Mit 29 Textabbildungen. XX, 535 Seiten Gr.-8°. 1957. Ganzleinen DM 49.70

Inhaltsübersicht: **Mathematik:** Das Begriffssystem der Mathematik. Zahlen, Funktionen und Operatoren. Differential- und Integralrechnung. Reihen und Reihenentwicklungen. Funktionen. Algebra. Transformationen. Vektoranalysis. Spezielle Koordinatensysteme. Gruppentheorie. Differentialgleichungen. Integralgleichungen. Variationsrechnung. Statistik (Wahrscheinlichkeitsrechnung). — **Physik:** Das Begriffssystem der theoretischen Physik. Mechanik. Elektrodynamik (einschließlich Optik). Relativitätstheorie. Quantentheorie. Thermodynamik. Statistische Methoden. — **Anhang.** Literatur- und Sachverzeichnis.

Aus den Besprechungen der vierten Auflage:

... Das Buch ist von einem Physiker für Physiker geschrieben und verfällt daher nicht in den Fehler, sich in kritischen mathematischen Existenzbeweisen zu verlieren, die für die Anwendung der Theorie uninteressant sind und den Leser abschrecken würden. Es ist kein Lehrbuch im eigentlichen Sinn, aber weit mehr als eine Formelsammlung oder ein Nachschlagewerk. Sein Ziel ist, dem wissenschaftlich und forschend arbeitenden Physiker und Ingenieur eine umfassende Kenntnis der physikalischen Grundgesetze und des zu ihrer Durchdringung und praktischen Anwendung erforderlichen mathematischen Rüstzeuges zu vermitteln.

... Das Studium des Buches, das an den Leser keine geringen Anforderungen stellt, bereitet hohen Genuß. Es gehört zu den klassischen Werken der mathematischen Physik. ...
„Elektrotechnische Zeitschrift"

... Auf zweierlei Weise glaube ich, daß das Buch dem Anfänger in mathematischer Physik, wie zuweilen aber auch dem Fortgeschrittenen, behilflich sein wird: erstens, weil es fertige Formeln und Anweisungen über die zugehörige Mathematik gibt, die der Leser je nach Bedarf nachschlagen kann, zweitens aber auch, weil der Leser hier eine Methode kennenlernt, wonach er dem Vorbilde des Verfassers folgend, Selbsthilfe schaffen kann, wo möglicherweise solche Hilfe nicht schon im Buche bereitliegt.
„Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Wir suchen zu kaufen

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Band 1, Heft 1, Reidemeister, Knotentheorie, 1932
Heft 2, Federhofer, Graphische Kinematik und Kinetostatik, 1932
Heft 3, Strutt, Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen, 1932
Heft 4, Hohenemser, Die Methoden zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen in der Elastokinetik, 1932
Heft 5, Bohr, Fastperiodische Funktionen, 1932

Band 2, Heft 1, Veblen, Projektive Relativitätstheorie, 1933
Heft 2, Rado, On the problem of Plateau, 1933
Heft 3, Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1933
Heft 4, Khintchine, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1933
Heft 5, Mac Duffee, The Theory of Matrices, 1933

Band 3, Heft 1, Bonnesen-Fenchel, Theorie der konvexen Körper, 1933
Heft 2, Struik, Theory of linear connections, 1933
Heft 3, Behnke-Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 1934
Heft 4, Heyting, Mathematische Grundlagen-Forschung, 1934
Heft 5, Zariski, Algebraic surfaces, 1935

Band 4, Heft 1, Deuring, Algebren
Heft 2, Waerden, Gruppen von linearen Transformationen, 1935
Heft 3, Krull, Idealtheorie, 1935
Heft 4, Koksma, Diophantische Approximationen, 1936
Heft 5, Carathéodory, Geometrische Optik, 1937

Band 5, Heft 1, Rado, Subharmonic functions, 1937
Heft 2, Hopf, Ergodentheorie, 1937
Heft 3, Ertel, Methoden und Probleme der dynamischen Meteorologie, 1938
Heft 4, Skolem, Diophantische Gleichungen, 1938
Heft 5, Nagy, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, 1942

Angebote möglichst mit Preisangaben erbeten an:

LANGE & SPRINGER

Wissenschaftliche Buchhandlung

BERLIN W 35

Reichpietschufer 20, Tel. 24 92 51

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzbur
Printed in Germany